BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

die studien eingangsphase

GEFÖRDERT VOM Bundesministerium für Bildung und Forschung

Übungsblatt 9

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 2. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im SoSe13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 11.06.13

Themen: Differenzierbarkeit, Kettenregel, Richtungsableitung

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie den Gradienten von $g(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + x_2^3}{1 + x_2 + 4x_3}$.

(b) Bestimmen Sie die linearisierte Funktion von g im Punkte $\vec{x}^0 = (1, 0, -2)$.

Aufgabe 2

(a) Sei $\vec{h} := \vec{g} \circ \vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Verknüpfung der Abbildungen $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die wie folgt definiert sind:

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(y_1) \\ \cos(y_1 y_2 y_3) \end{pmatrix}.$$

Was ist die Jacobimatrix von h?

(b) Es sei $\vec{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - 3y \\ 4x - 5xy \end{pmatrix}$, und die Abbildung $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erfülle die Bedingungen

$$\vec{f}(\vec{g}(t, s)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ s^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist dann $\mathscr{J}_{\vec{g}}(1, 2)$?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie im Folgenden jeweils die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ im Punkt $\vec{x}^0$, wobei

(a) $f(\vec{x}) = x_1^2 x_2 \sin(x_1 x_3^2 + 3x_2)$, $\quad \vec{v} = (2, -1, 3)$, $\quad \vec{x}^0 = (\pi, \pi, 1)$

(b) $f(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & x_1 x_2 \neq 0 \\ 0, & x_1 x_2 = 0 \end{array} \right\}$, $\quad \vec{v} = (1, -1)$, $\quad \vec{x}^0 = \vec{0}$.

Aufgabe (Stochastik)

Die Lebensdauer eines Gerätetyps unterliege einer Exponentialverteilung. Man weiß, dass 90% der Geräte 10000 Betriebsstunden überstehen ohne auszufallen.

a) Was ist die mittlere Lebensdauer?

b) Mit welcher W'keit hält ein Gerät länger als 13000 Stunden?

c) Angenommen, man weiß, dass eines der Geräte schon 8000 Stunden funktioniert hat. Mit welcher W'keit fällt es auch in den folgenden 8000 Stunden nicht aus?

Aufgabe (Wiederholung)

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\alpha(t) = (t^3(1-6t), t(1-2t^2))$.

(a) Wo ist die Kurve regulär?

(b) In welchen Punkten sind die Tangenten an die Kurve waagerecht und wo senkrecht?