

Übungsblatt 6

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 2. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbot im SoSe13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschkyk, 14.05.13

Themen: Polarkoordinaten, Tangente, Normale, Evolute

Aufgabe 1 Stellen Sie die folgenden Kurven in Polarkoordinaten dar und skizzieren Sie diese.

(i) $3x - 7y = 21$

(ii) $xy = 9$

(iii) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^3 + 12xy^2 = 0$

(iv) $(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$ (*Pascalsche Schnecke*)

Berechnen Sie zu jeder dieser Geraden jeweils die Tangenten und Normalen.

Aufgabe 2

Ist $\alpha(t) = e^{bt} \begin{pmatrix} \cos(at) \\ \sin(at) \end{pmatrix}$ eine logarithmische Spirale (mit $a, b > 0$), so zeigen Sie, dass in allen Schnittpunkten von α mit der x -Achse die zugehörigen Tangenten parallel verlaufen. Zeigen Sie das entsprechende Ergebnis für die Tangenten in den Schnittpunkten von α mit der y -Achse.

Aufgabe 3

(a) Sei $\alpha(t) := (t^2, t^3)$ die sog. *Neilsche Parabel*. Berechnen Sie die Bogenlänge von α für $0 \leq t \leq 4$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Tangente von α in t parallel zu einem vorgegebenen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

(b) Für die *Kettenlinie* $\alpha(t) = (t, 2 \cosh(t/2))$ berechnen Sie im Bereich $0 \leq t \leq 2$ die Bogenlänge.

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die Krümmung der Zykloide, die durch $\alpha(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$ gegeben ist.

(b) Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare reguläre Kurve, so dass die Krümmung κ von α überall positiv ist, so bezeichnen wir als Schmiegkreis an α im Punkte $\alpha(t)$ den Kreis um $\alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n_\alpha(t)$ mit Radius $\frac{1}{\kappa(t)}$. Dabei ist $n_\alpha(t)$ der Normaleneinheitsvektor an α bei $\alpha(t)$. Die Kurve

$$\alpha^E(t) := \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n_\alpha(t)$$

nennt man *Evolute* zu α . Bestimmen Sie die Evolute der Zykloide.

Aufgabe (Stochastik)

Eine Firma stellt Widerstände mit dem Nennwert 100 Ohm her. Die tatsächlichen Werte sind aber normalverteilt mit Erwartungswert 100 Ohm und Streuung 5 Ohm. Angenommen, ein Abnehmer akzeptiert Abweichungen von maximal 10 Ohm. Wieviel Prozent der Lieferung wird er "zurückgehen" lassen?

Aufgabe (Wiederholung) Wo hat die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2+8}$ lokale und absolute Extremstellen?