

Übungsblatt 5

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 2. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbolt im SoSe13 – Dipl.-Math. T. Pawlaschky, 07.05.13

Themen: Partialbruchzerlegung, Numerische Integration, Kurven

Aufgabe 1 Berechnen Sie folgende Integrale.

$$(a) \int_{-1}^0 \frac{-x^3 + 2x^2 + 6x + 17}{2(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2)} dx \quad (b) \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{(\sqrt{1-x^2})^3} \quad (c) \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

Aufgabe 2

Integrieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ jeweils auf $[0, 1]$ und auf $[0, 10]$ numerisch mit der Trapezregel (für Feinheit $n = 10$) und vergleichen Sie diese Werte mit $\sqrt{\pi}/2$.

Aufgabe 3

Man fixiere zwei Zahlen $a, b > 0$. Im \mathbb{R}^2 sei G die Gerade senkrecht auf der x -Achse durch $(a, 0)$ und $B = (a, c)$ ein Punkt auf G . Sei dann g diejenige Gerade, die durch den Ursprung und B verläuft. Auf der Geraden g befinden sich zwei Punkte P_1 und P_2 , die zu B den Abstand b haben. Lläuft nun B auf G entlang, beschreiben P_1 und P_2 die "Äste" einer Kurve, die als *Konchoide des Nikomedes* oder *Muschelkurve* bezeichnet wird.

(a) Skizzieren Sie die oben erwähnten Kurven für die Fälle $a > b$, $a = b$ und $a < b$.

(b) Zeigen Sie, dass die Koordinaten (x, y) Punkte der Konchoide die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(a - x)^2 = b^2 x^2$$

erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass $\alpha_1(t) := \begin{pmatrix} a + b \cos(t) \\ a \tan(t) + b \sin(t) \end{pmatrix}$ und $\alpha_2(t) := \begin{pmatrix} a - b \cos(t) \\ a \tan(t) - b \sin(t) \end{pmatrix}$ die Gleichung in (b) erfüllen und somit die Konchoide beschreiben.

(d) Untersuchen Sie die Kurven α_1 und α_2 auf Regularität.

Aufgabe 4

Die sog. Astroide (Sternkurve) sei gegeben durch die Parametrisierung $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie: $\cos^6(t) + \sin^6(t) = 1 - \sin^2(t) \cos^2(t)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass die Astroide durch die Gleichung

$$(1 - x^2 - y^2)^3 = 27x^2y^2$$

gegeben ist.

(c) Wo ist die Kurve α regulär und wo nicht?

Aufgabe (Stochastik)

Ein Ganove zahlt bei einer Bank fünfzig 100-Euro-Scheine ein, von denen 10 seiner eigenen Produktion entstammen. Die Bank prüft 4 der eingezahlten Scheine auf Echtheit.

a) Mit welcher W'keit sind höchstens 2 der 4 Scheine echt?

b) Mit welcher W'keit sind alle 4 echt?

Aufgabe (Wiederholung) Projizieren Sie die Gerade, die durch $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ verläuft,

auf die Ebene, die die Punkte $\vec{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ enthält.