

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto ae^{it} + be^{-it}$ mit $a > b > 0$. Man bestimme Anfangs- und Endpunkt sowie die Spur von γ und berechne

$$\int_{\gamma} z dz \quad , \quad \int_{\gamma} z^2 dz.$$

Aufgabe 2. Man berechne:

a)

$$\int_{[-i, i]} z \cos z dz$$

b) Für $\gamma = [a, b]$ und $\gamma = \partial D_r(z_0)$:

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$$

Aufgabe 3. Es sei γ ein Integrationsweg von $1 + i$ nach $2i$. Man berechne die Integrale der folgenden Funktionen über γ :

$$\cos((1+i)z) \quad , \quad iz^2 + 1 - 2iz^{-2} \quad , \quad (z+1)^{-3} \quad , \quad ze^{iz^2}.$$

Aufgabe 4. Man zeige, dass $z \mapsto \operatorname{Re} z$ in \mathbb{C} keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (zusammenhängend) und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gelte: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Sei $a \in G$ fest gewählt. Zeigen Sie:

a) Zu jedem Punkt $z \in G$ existiert ein Integrationsweg γ_z von a nach z .

b) Für zwei Integrationswege γ_z^1 und γ_z^2 von a nach z ist $\int_{\gamma_z^1} f(z) dz = \int_{\gamma_z^2} f(z) dz$, d.h. wir können eine Funktion definieren:

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

c) Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset G$. Für alle $z \in D_r(z_0)$ gilt:

$$F(z) - F(z_0) = (z - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt.$$

d) $A(z) := \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt$ ist stetig in z_0 und $A(z_0) = f(z_0)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f auf G .

Abgabe: Mi, 29.05.13 in der Übung.

Homepage: www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft