Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Bergische Universität Wuppertal

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist konstant

b) $\operatorname{Re} f$ ist konstant

c) $|f|$ ist konstant

d) $\overline{f}$ ist holomorph

Aufgabe 2. Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\right)} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right)}$$

b) Ist f reellwertig, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)}$$

c) $\overline{f}$ ist holomorph $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

d) Ist f zwei mal reell differenzierbar, so gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

e) Die Kettenregeln:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$

Aufgabe 3. Verwenden Sie das Cauchy-Kriterium (Satz 6.4 der Vorlesung), um das **Majorantenkriterium** zu beweisen:

Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ eine Reihe von Funktionen $f_\nu : M \to \mathbb{C}$ auf einer Menge $M \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Gilt $|f_\nu(z)| \le a_\nu$ für alle ν und alle $z \in M$, so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ auf M absolut und gleichmäßig.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktionenfolge $\{f_n\}$ durch $f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}$. Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf $D_1(0)$ lokal gleichmäßig gegen 1 konvergiert und für $r > 1$ auf $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Entwickeln Sie die Funktion f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ in eine Potenzreihe um 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Abgabe: bis Donnerstag, den 09.05.13, 17 Uhr in Postfach 104 (T. Pawlaschyk) auf Ebene D.10

Homepage: *www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft*