

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen:

- a) $a_n = \lambda^n(3 + 3i)^n$, für $\lambda \in \mathbb{R}$,
- b) $b_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{Im}(i + n)^3$,
- c) $c_n = \frac{1}{6^n} |(1 + i)^n| |2 + i|^n$.

Aufgabe 2. Wir betrachten \mathbb{C} einerseits als \mathbb{C} - und andererseits als \mathbb{R} -Vektorraum. $\operatorname{Hom}_K(X, Y)$ bezeichnet den Vektorraum der K -linearen Vektorraumhomomorphismen zwischen K -Vektorräumen X und Y .

- a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
- b) Identifizieren Sie $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit den reellen 2×2 -Matrizen $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ indem Sie $(1, i)$ als \mathbb{R} -Basis von \mathbb{C} wählen. Bestimmen Sie den Unterraum $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ in $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3.

- a) Zeigen Sie, dass $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\bar{z}| < 1\}$ zusammenhängend ist.
- b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $a \in G$. Beweisen Sie, dass $G \setminus \{a\}$ wieder ein Gebiet ist.
- c) Zeigen Sie, dass die analoge Aussage für eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{R}$ falsch ist.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie: die Polynome in zwei reellen Variablen mit komplexen Koeffizienten lassen sich wahlweise in der Form

$$(1) \quad f(z) = \sum_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

(mit $z = x + iy$) oder

$$(2) \quad f(z) = \sum_{\substack{\kappa=1, \dots, k \\ \lambda=1, \dots, l}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \bar{z}^\lambda$$

schreiben. Schreiben Sie das Polynom $5x^3 - 4xy + iy^6$ in der Form (2).

b) Zeigen Sie: in der Form (1) bzw. (2) sind die Koeffizienten von f eindeutig bestimmt. Wie erkennt man in der Form (2), ob es nur reelle Werte annimmt? Wie erkennt man, ob es auf \mathbb{R} nur reelle Werte annimmt?

Abgabe: Do, 25.04.13 in der Vorlesung.

Homepage: www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft