Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk

Bergische Universität Wuppertal

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Art der Singularität im Punkt z_0. Berechnen Sie für hebbare Singularitäten den Grenzwert von f in z_0, geben Sie für nicht-hebbare Singularitäten den Hauptteil an.

a)
$$f_1(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1} \quad \text{in } z_0 = -i$$

b)
$$f_2(z) = \frac{1}{1 - e^z} \quad \text{in } z_0 = 0$$

c)
$$f_3(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4} \quad \text{in } z_0 = 0$$

d)
$$f_4(z) = \cos(1/z) \quad \text{in } z_0 = 0$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\partial D_1(-i)} f_1(z)dz \ , \ \int_{\partial D_1(0)} f_2(z)dz \ , \ \int_{\partial D_2(0)} f_3(z)dz \ , \ \int_{\partial D_3(0)} f_4(z)dz.$$

Aufgabe 2. Es sei $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $e^{1/z}$ in $D_\epsilon(0) - \{0\}$ jeden von Null verschiedenen Wert unendlich oft annimmt.

Aufgabe 3. Seien f und g zwei holomorphe Funktionen, die in einem Punkt z_0 beide eine Nullstelle n-ter Ordnung haben. Zeigen Sie, dass z_0 eine hebbare Singularität von f/g ist, und dass gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}.$$

Aufgabe 4. Es sei z_0 isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f. Zeigen Sie, dass z_0 kein Pol von e^f ist.
Hinweis: Vergleichen Sie die Laurent-Reihen von e^f *und* $(e^f)' = f'e^f$.

Abgabe: Do, 11.07.13 in der Vorlesung.
Homepage: *www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft*