Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Bergische Universität Wuppertal

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass Re f oder Im f konstant ist. Zeigen Sie: f ist konstant.

Aufgabe 2. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einem beschränkten Gebiet G.

a) Es gebe zu jedem $C > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geq C$ für alle $z \in G$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial G) < \delta$. Zeigen Sie: f ist nicht holomorph.

b) f sei holomorph und es gebe zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(z)| < \epsilon$ für alle $z \in G$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial G) < \delta$). Zeigen Sie: $f \equiv 0$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie am Beispiel der Funktion $\cos z$, dass das Maximumprinzip nicht für unbeschränkte Gebiete gilt.

Aufgabe 4. Es seien f und g zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: es gibt eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ so dass $f = \lambda \cdot g$.

Aufgabe 5. Sei f eine ganze transzendente Funktion (also kein Polynom) und $w_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Wir nehmen an, es existieren Konstanten $R > 0$ und $\epsilon > 0$ so dass $|f(z) - w_0| > \epsilon$ für alle z mit $|z| \geq R$.

a) Zeigen Sie: f hat auf der Menge $\overline{D_R(0)}$ nur endlich viele w_0-Stellen.

b) Es seien $b_1, ..., b_r$ die w_0-Stellen von f mit Vielfachheiten $n_1, ..., n_r$. Zeigen Sie:

$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{\prod_{j=1}^{r}(z - b_j)^{n_j}}$$

ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen.

c) Zeigen Sie: es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|1/g(z)| \leq C \; |z|^{n_1 + ... + n_r} \quad \text{für} \;\; |z| \geq R,$$

und folgern Sie, dass $1/g$ konstant ist. Damit ist aber auch g konstant und f ein Polynom im Widerspruch zu den Annahmen.

Aufgabe 6. Verwenden Sie Aufgabe 5, um Folgendes zu zeigen:

a) Sei f eine ganze transzendente Funktion. Dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $\{z_j\}_j$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{j\to\infty} |z_j| = \infty$ und $\lim_{j\to\infty} f(z_j) = w_0$.

b) Sei f eine ganze Funktion und es gebe $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten $M, R > 0$ so dass $|f(z)| \geq M \cdot |z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\geq n$.

Abgabe: Do, 27.06.13 in der Vorlesung.
Homepage: *www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft*