Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk
Bergische Universität Wuppertal

# Einführung in die Funktionentheorie (SS 2013)

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.**
a) Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ein Körper ist.
b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, und: $\overline{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.
c) Sei $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $L$ (unter der kanonischen Identifizierung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) genau dann $\mathbb{R}$-linear ist, wenn es Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $L(z) = \lambda z + \mu \overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe 2.** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen möglichst vereinfacht in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$i^n \text{ (für } n \in \mathbb{Z}), \quad (2+i)^3, \quad \left(\frac{1 - i\sqrt{2}}{2}\right)^3, \quad \frac{4-2i}{2-3i}, \quad \frac{(1+i)^3}{(1-i)^5}$$

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie jeweils diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:
a) $z^5 = 1$,
b) $z^4 = 4 + 4i$,
c) $z^2 + az + b = 0$, für beliebige Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$.

**Aufgabe 4.** Skizzieren Sie die folgenden Mengen und geben Sie an, ob diese offen oder abgeschlossen sind. Bestimmen Sie jeweils das Innere, den Abschluß und den Rand der Mengen.
a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z + 2i|\}$,
b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } (z^2) = z\}$,
c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } ((1-i)z) = 0\}$,
d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq i(z - \overline{z}) < 2\}$.

---

**Abgabe:** Do, 18.04.13 in der Vorlesung.
**Homepage:** *www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ss13/ft*