Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. Shcherbina SoSe 2012

Klausur: Einführung in die Funktionentheorie

10.07.2012

Musterlösung

1. (a) Polynome sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Quotienten holomorpher Funktionen sind außerhalb der Nullstellen des Nenners holomorph, also hat f in 0 und in $2+2i$ eine Singularität.

   (b) Im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ liegen keine Singularitäten, und die einzige Singularität in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ist die in 0.

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \underbrace{\frac{z+8}{(z-2-2i)}}_{=:g(z)}$$

   Für Bestimmung des Hauptteils dieser Laurent-Reihe muss also nur der zweite Faktor g bis zum Grad 1 in eine Taylorreihe um 0 entwickelt werden (Konv.-Radius $|2+2i| = \sqrt{8}$). Man berechnet

$$g'(z) = \frac{(z-2-2i)-(z+8)}{(z-2-2i)^2} = \frac{-10-2i}{(z-2-2i)^2}$$

   und erhält $g(0) = \frac{-8}{2+2i}$, $g'(0) = \frac{-10-2i}{(2+2i)^2}$. Somit lautet der Hauptteil der Laurent-Reihe:

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{-4}{1+i} + \frac{1}{z} \cdot \frac{-5-i}{2(1+i)^2}$$

   (c) Im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$ liegen keine Singularitäten, und in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}$ liegen die Singularitäten 0 und $2+2i$. Mit Hilfe der Entwicklung in eine geometrische Reihe in $1/z$ ergibt sich:

$$f(z) = \frac{z+8}{z^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2+2i}{z}} = \frac{z+8}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2+2i}{z}\right)^k = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=3}^{\infty} (10+2i) \cdot (2+2i)^{k-3} \frac{1}{z^k}$$

   Offenbar hat die Laurent-Reihe verschwindenden Nebenteil.

   (d) Eine holomorphe Funktion besitzt in einem Punkt z_0 eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius ρ derart, dass ρ der größtmögliche Radius eines Kreises um z_0 ist, in welchem keine (nicht hebbare) Singularität liegt. Die Distanzen zwischen $z_0 = 5i$ und den Singularitäten lauten:

$$|z_0 - (2+2i)| = \sqrt{13} \quad < \quad |z_0 - 0| = 5$$

   Somit ist $\rho = \sqrt{13}$, denn die Singularität in $2+2i$ ist nicht hebbar.

2. (a) *Es existieren zwei Formulierungen des Maximumprinzips. Beide werden als vollständige Antwort akzeptiert.*
   Variante 1: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Wenn $|f|$ ein lokales Maximum in G annimmt, dann ist f konstant.
   Variante 2: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ nicht konstant. Dann nimmt $|f|$ das Maximum auf dem Rand ∂G an, aber nicht in G.

   (b) $f(z) := z^{17} \cdot (2z^2 - 5z + 2)$ ist ein Polynom, und damit auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, insbesondere ist $f \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$ für $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, also folgt nach dem Maximumprinzip (Var. 2), dass das Supremum angenommen wird, und zwar ausschließlich auf ∂G:

$$\sup_{|z| \leq 1} \left| z^{17} \cdot \left(2z^2 - 5z + 2\right) \right| = \max_{|z|=1} \left| z^{17} \cdot \left(2z^2 - 5z + 2\right) \right| = \max_{|z|=1} \left| 2z^2 - 5z + 2 \right|$$

Folgende Abschätzung für $|z| = 1$ kann man durch explizite Rechnung erzielen:

$$\begin{aligned}\left|2z^2 - 5z + 2\right|^2 &= 2|z|^4 + 25|z|^2 + 4 + 4z^2 + 4\overline{z}^2 - 10z - 10\overline{z} - 10z^2\overline{z} - 10z\overline{z}^2 \\ &= 33 + 4(z^2 + \overline{z}^2) - 20(z + \overline{z}) = 33 + 8\operatorname{Re}(z^2 - 5z) \\ &\leq 81 = 9^2\end{aligned}$$

Wählt man $z = -1$, so erhält man Gleichheit. Damit beträgt das Supremum 9. Das Supremum kann nur realisiert werden, wenn $\operatorname{Re}(z^2 - 5z) = 6$ gilt; die einzige Stelle auf $|z| = 1$, wo dies zutrifft, ist bei $z = -1$.
Alternativ kann man auch geometrisch argumentieren: $|2z^2 - 5z + 2| = 2|z - 2| \cdot |z - 1/2|$. Die Distanz eines Punktes zu den beiden Nullstellen ist genau für $z = -1$ maximal.

3. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich und seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Zudem sei $V \subset\subset U$ ein relativ kompakter Teilbereich mit Randzyklus Γ. Falls $|g(z) - f(z)| < |g(z)|$ gilt für alle $z \in |\Gamma|$, dann haben f und g gleich viele Nullstellen in V (mit Multiplizität gezählt).

(b) Der Satz von Rouché kann zweimal auf Kreisscheiben angewendet werden, da $A = 2\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.
1. Für die Anwendung des Satzes von Rouché auf die Kreisscheibe $V_1 := 2\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = 3z^4 + z^3 + 8z^2 + 2iz - 1, \qquad g_1(z) = 3z^4$$

muss für $|z| = 2$ nachgeprüft werden, dass:

$$|g_1(z) - f(z)| = |z^3 + 8z^2 + 2iz - 1| \leq 2^3 + 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot +1 = 45 < 48 = |3z^4| = |g_1(z)|$$

Damit folgt, dass f in der Kreisscheibe $2\mathbb{D}$ gleich viele Nullstellen wie $3z^4$ aufweist, also 4.
2. Für die Anwendung des Satzes von Rouché auf die Kreisscheibe $V_2 := \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = 3z^4 + z^3 + 8z^2 + 2iz - 1, \qquad g_2(z) = 8z^2$$

muss für $|z| = 1$ nachgeprüft werden, dass:

$$|g_2(z) - f(z)| = |3z^4 + z^3 + 2iz - 1| \leq 3 + 1 + 2 + 1 = 7 < 8 = |8z^2| = |g_2(z)|$$

Damit folgt, dass f in der Kreisscheibe $\mathbb{D}$ gleich viele Nullstellen wie $8z^2$ aufweist, also 2.
Auf den Rändern liegen offenbar keine Nullstellen von g_1 bzw. g_2 und wegen der strikten Ungleichungen auch keine von f. Für den Kreisring A bedeutet dies, dass darin (mit Multiplizität gezählt) $4 - 2 = 2$ Nullstellen von f liegen.

(c) $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_n \neq 0$. Setzt man $g(z) = a_n z^n$, dann ist $p - g$ ein Polynom vom Grad $m \leq n - 1$. Für $|z| = r \to \infty$ gilt daher $\frac{p-g}{g} \to 0$, insbesondere folgt $|p(z) - g(z)| < |g(z)|$ auf $|z| = r$ für groß genug gewähltes $r > 0$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Rouché für $U = \mathbb{C}$ und $V = r\mathbb{D}$ erfüllt, und p hat mit Multiplizität gezählt in $r\mathbb{D}$ gleich viele Nullstellen wie $g(z) = a_n z^n$, nämlich n.

4. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich und $V \subset U$ ein relativ kompakter Teilbereich mit $\mathcal{C}^1$-Rand sowie $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für den Randzyklus Γ von V und alle $w \in V$ sowie $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - w)^{k+1}} \, \mathrm{d}z$$

Die Formulierung der Aussage für $k = 0$ ist ausreichend.

(b) Das Polynom $z^2 + 2az + 1 = (z + a)^2 - a^2 + 1$ hat die Nullstellen $z_{1,2} = -a \pm i\sqrt{1 - a^2}$. Da $|z_{1,2}| = \sqrt{a^2 + 1 - a^2} = 1 < 2$, liegen sie beide innerhalb des positiv berandeten Kreises $2\mathbb{D}$. Mit Partialbruchzerlegung und der Cauchy-Integralformel ergibt sich:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right) \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{z_1 - z_2}(1 - 1) = 0$$

(c) Bei Existenz einer holomorphen Stammfunktion müssten alle Integrale von g über geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ verschwinden. Folgendes Integral lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Integralformel berechnen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\mathbb{D} - i)} g(z) \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(\mathbb{D} - i)} \frac{1}{(z + i)^3} \frac{1}{(z - i)^3} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2!} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left. \frac{1}{(z - i)^3} \right|_{z=-i} = \frac{3}{16} i \Longrightarrow \nexists \text{ Stammfkt.}$$