Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. N. Shcherbina SoSe 2012

Wiederholungsklausur: Einführung in die Funktionentheorie 2.10.2012

Dauer: 2 h
Hilfsmittel: keine
Bitte geben Sie auf jedem Blatt oben Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.
Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Sei f gegeben durch $z \mapsto \dfrac{z}{\sin(\pi z)}$
   (a) [2 P] Für welche $z \in \mathbb{C}$ weist f nicht hebbare Singularitäten auf?
   (b) [4 P] Bestimmen Sie die Residuen von f in diesen Singularitäten.
   (c) [4 P] Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$ jeweils das Integral $\displaystyle\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z$,
   wobei der Weg γ_k gegeben ist durch: $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{it}$

2. Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein konvexes Gebiet mit $1 \in G$.
   (a) [3 P] Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch
   $$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w$$
   wobei γ_z irgendein Weg in G mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt z ist.
   Zeigen Sie, dass $f(z)$ unabhängig von der Wahl des Weges γ_z ist.
   (b) [2 P] Begründen Sie, warum f holomorph ist.
   (c) [3 P] Zeigen Sie, dass f eine Logarithmusfunktion ist, d.h. dass gilt:
   $$\forall\ z \in G : \quad \exp(f(z)) = z$$
   (d) [2 P] Gibt es einen geschlossenen Weg γ in G mit $\mathrm{ind}_\gamma(0) \neq 0$?

3. (a) [2 P] Wie lautet der Riemannsche Hebbarkeitssatz?
   (b) [5 P] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, mit einer Polstelle der Ordnung n im Punkt 0. Zeigen Sie, dass
   $$z \mapsto z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$
   eine hebbare Singularität im Punkt 0 besitzt und bestimmen Sie den Wert der holomorphen Fortsetzung von f diesem Punkt.
   (c) [3 P] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{k : k \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

4. (a) [4 P] Bestimmen Sie die Potenzreihe von $f(z) = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{i-z}$ um den Punkt $2 + 2i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.
   (b) [2 P] Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ folgender Potenzreihe:
   $$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} z^{2^k}$$
   (c) [2 P] Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{\rho \cdot \exp(2\pi i \cdot m/2^n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ im Rand des Konvergenzkreises von g dicht liegt.
   (d) [2 P] Zeigen Sie, dass die Reihe g in jedem Punkt von A konvergiert.