

Klausur: Einführung in die Funktionentheorie

10.07.2012

Dauer: 2 h

Hilfsmittel: keine

Bitte geben Sie auf jedem Blatt oben Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Es sei f gegeben durch

$$z \mapsto \frac{z + 8}{z^2 \cdot (z - 2 - 2i)}$$

- (a) [2 P] An welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ weist die Funktion Singularitäten auf?
(b) [3 P] Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
(c) [3 P] Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < 4\}$
(d) [2 P] Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f im Punkt $5i$?
2. (a) [2 P] Wie lautet das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen?
(b) [8 P] Bestimmen Sie:

$$\sup_{|z| \leq 1} |z^{17} \cdot (2z^2 - 5z + 2)|$$

Wird das Supremum angenommen? Wenn ja, in welchen Punkten?

3. (a) [2 P] Wie lautet der Satz von Rouché?
(b) [5 P] Wieviele Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) hat die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto 3z^4 + z^3 + 8z^2 + 2iz - 1$$

im Kreisring $A := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?

- (c) [3 P] Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché, d.h. Sie beweisen, dass für jedes komplexe Polynom p vom Grad $n \in \mathbb{N}$ so eine offene Kreisscheibe $r\mathbb{D}$ um 0 mit Radius $r > 0$ existiert, dass p in $r\mathbb{D}$ mit Multiplizität gezählt genau n Nullstellen hat.
4. (a) [2 P] Wie lautet die allgemeine Cauchy-Integralformel?
(b) [4 P] Gegeben sei der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Berechnen Sie für $a \in (0, 1)$ folgendes Wegintegral:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz$$

- (c) [4 P] Hat die Funktion $g(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ eine holomorphe Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$?