Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 20. Juni 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. Es sei $f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: Wenn die Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert, dann ist f ein Polynom in z.

Hinweis: In diesem Fall sind die Partialsummenfolgen in $\mathbb{C}$ gleichmäßige Cauchyfolgen.

2. Es sei $z \in G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-,\ z = \rho \cdot e^{\varphi i},\ \rho > 0,\ -\pi < \varphi < \pi$.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass durch $\log(z) := \ln \rho + i\varphi$ eine holomorphe Logarithmusfunktion auf G definiert wird.

(b) Zeigen Sie, dass durch $g_n(z) := \exp\left(\frac{1}{n}\log(z)\right), \in \mathbb{N}$, auf G eine Funktion mit der Eigenschaft $(g_n(z))^n = z$ definiert wird und geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ jeweils n verschiedene holomorphe Funktionen mit dieser Eigenschaft von g_n an.

(c) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{C}$ und auf $\mathbb{C}^*$ keine holomorphe Logarithmusfunktion existiert.

(d) Gilt $\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w)$ für $z, w, z \cdot w \in G$?

3. Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2e^{it}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy-Integralformel für Kreisscheiben:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z+i}\,\mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+(3-i)z-3i}\,\mathrm{d}z$

4. Finden Sie ein kompaktes Dreieck $\triangle \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$\int_{\partial\triangle} \overline{z}\,\mathrm{d}z \neq 0,$$

wobei $\partial\triangle$ für einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg entlang des Randes des Dreiecks $\triangle \subset \mathbb{C}$ steht.

Abgabe: jeweils mittwochs bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10