Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 13. Juni 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. Seien U, V offene Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Eine (reell) differenzierbare Abbildung $f : U \to V$ mit in jedem Punkt von U invertierbarem Differential heißt *winkeltreu*, falls gilt: Für je zwei reguläre differenzierbare Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ mit Schnittpunkt $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ gilt:

$$\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{\|\gamma_1'(t_1)\| \cdot \|\gamma_2'(t_2)\|} = \frac{\langle (f \circ \gamma_1)'(t_1), (f \circ \gamma_2)'(t_2) \rangle}{\|(f \circ \gamma_1)'(t_1)\| \cdot \|(f \circ \gamma_2)'(t_2)\|}$$

Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.

Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $f : U \to V$ mit auf U nullstellenfreiem f' zwischen zwei Bereichen U und V eine winkeltreue Abbildung bzgl. des reellen Skalarproduktes $\langle z, w \rangle = \frac{1}{2}(z\overline{w} + \overline{z}w)$ ist.

2. Seien $\rho, \alpha, \beta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für

(a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{it}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$

(b) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{nit}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^{-1}$

(c) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \alpha \cos(t) + i\beta \sin(t)$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

(d) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \rho e^{it}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto g'(z) \cdot g(z)$ für $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph

3. Auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei für jedes $k \in \mathbb{Z}$ folgende Funktion definiert:

$$f_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f_k(z) = z^k$$

Untersuchen Sie, welche der Funktionen f_k in $\mathbb{C}^*$ eine Stammfunktion besitzt und geben Sie diese an.

4. Es sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) := \ln|z|$, wobei ln den reellen natürlichen Logarithmus bezeichne.

(a) Ist f harmonisch in $\mathbb{C}^*$?

(b) Ist f Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}^*$?

5. [2 Punkte] Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) = m + \rho e^{it},\ m \in \mathbb{C}, \rho > 0$, und es sei p ein Polynom über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_\gamma \overline{p(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \rho^2 \overline{p'(m)}$$

Abgabe: jeweils mittwochs bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10