Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 6. Juni 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ äquivalent sind:

(a) $f = \exp$

(b) f ist holomorph mit $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ sowie $f'(0) = 1$.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion nie den Wert Null annimmt, aber jeden Wert $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich oft annimmt.

(b) Zeigen Sie, dass $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv sind.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Gleichung $a = \frac{1}{2}(w \pm 1/w)$ *für jedes* $a \in \mathbb{C}$ *eine Lösung* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *hat.*

(c) Zeigen Sie, dass es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ derart gibt, dass $\sin^{-1}(K) \subset \mathbb{C}$ nicht kompakt ist.

3. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: f ist in $(x,y) = (0,0)$ partiell reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen $u_x(0,0) = v_y(0,0)$, $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$ sind erfüllt.

(b) Wo ist f stetig? Wo ist f holomorph?

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen f jeweils in eine Potenzreihe um z_0 und bestimmen Sie dann den Konvergenzradius:

(a) $f(z) = e^z,\ z_0 = \pi i$

(b) $f(z) = z^3,\ z_0 = i$

(c) $f(z) = \dfrac{z^2}{1-z},\ z_0 = 0$

(d) $f(z) = \dfrac{z+3}{z-2},\ z_0 = 0$

Abgabe: jeweils mittwochs bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10