Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 22. Mai 2012

1. Sei D eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $a = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, mit einer harmonischen Funktion $u : D \to \mathbb{R}$. Eine harmonische Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ derart, dass $u + iv$ eine auf D holomorphe Funktion darstellt, heißt eine zu u *konjugierte harmonische Funktion*.

(a) Zeigen Sie, dass v bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x_0 + iy_0 \in D$ die Funktion

$$\tilde{v}(x_0, y_0) := \int_\beta^{y_0} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y)|_{x=\alpha}\, \mathrm{d}y - \int_\alpha^{x_0} \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)|_{y=y_0}\, \mathrm{d}x$$

definiert ist und eine zu u harmonisch konjugierte Funktion darstellt.

2. Gegeben Sei die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ kompakt konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ kompakt konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(c) Entwickeln für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n in eine Potenzreihe um $z = 0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 3^j z^{3j}$

(b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \sin(\sqrt{2}\pi \cdot j)(z-\pi)^j$ *Hinweis: Sie dürfen das Resultat aus Aufgabe 1.c von Blatt 2 verwenden..*

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{2^j(2j)!} z^j$

4. Gegeben seien zwei komplexe Potenzreihen um $a \in \mathbb{C}$,

$$f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j \qquad \text{und} \qquad g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} d_j (z-a)^j$$

mit den Konvergenzradien $\rho > 0$ bzw. $\sigma > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für den Konvergenzradius τ der Potenzreihe $h(z) := \sum_{j=0}^{\infty} (c_j + d_j)(z-a)^j$ gilt:

$$\tau \geq \min\{\rho, \sigma\}$$

(b) Es sei zusätzlich $c_j \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $k(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{c_j}(z-a)^j$ höchstens so groß sein kann wie $1/\rho$.

Abgabe: jeweils dienstags bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10