Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 15. Mai 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ daraufhin, ob sie Realteil einer in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbaren Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sein können und geben sie diese ggf. an.
Notation: $z = x + yi \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $a(z) = x^2 - y^2$

(b) $b(z) = x^2 + y^2$

(c) $c(z) = x^3$

(d) $d(z) = \cos(x) \sinh(y)$

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

holomorph ist und bestimmen Sie g'.

3. Für Koordinaten $z = x + iy \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$, seien die Differentialoperatoren $\partial := \dfrac{\partial}{\partial z}$ bzw. $\overline{\partial} := \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften für eine reell differenzierbare Funktion $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ auf einem Bereich D:

(a) $\overline{\partial} f = \overline{\partial \overline{f}}$

(b) $\overline{\partial}\ \overline{f} = \overline{\partial f}$

(c) Die Funktion f ist genau dann auf D holomorph, wenn $\overline{\partial} f = 0$ gilt. In diesem Fall gilt $f' = \partial f$.

(d) $4\partial\overline{\partial} = 4\overline{\partial}\partial = \Delta$, wobei Δ für den Laplace-Operator steht.

4. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + iv \in \mathcal{O}(G)$ mit Real- bzw. Imaginärteil u bzw. v.
Wann gilt $u^2 + iv^2 \in \mathcal{O}(G)$?

Abgabe: jeweils dienstags bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10