Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 8. Mai 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $a \in G$. Zeigen Sie, dass die Menge $G' := G \setminus \{a\}$ ebenfalls ein Gebiet ist.

(b) Zeigen Sie, dass die analoge Aussage für eine offene und zusammenhängende Menge $G \subseteq \mathbb{R}$ falsch ist.

2. [1 Punkt] Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über $X \subseteq \mathbb{C}$ äquivalent sind:

(a) X ist zusammenhängend

(b) Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist konstant.

3. [2 Punkte] Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\partial G \neq \emptyset$, und durch

$$d_G(z) := \inf\{|z - w| \ : \ w \in \partial G\}$$

sei die sogenannte Randabstandsfunktion definiert. Zeigen Sie, dass d_G Lipschitz-stetig ist.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ zwischen metrischen Räumen heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, dass für alle $a, b \in X_1$ gilt: $d_2(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_1(a, b)$. In dieser Aufgabe ist jeweils die euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}_0^+$ gemeint.

4. Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen von $z = x + yi \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}$, in welchen Punkten ihres Definitionsbereichs sie komplex differenzierbar bzw. holomorph sind.

(a) $\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

(b) $3z^2\overline{z} + \overline{z}^3$

(c) $\dfrac{\overline{z} - i}{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1}$

(d) $\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

5. Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die genau entlang der reellen Achse komplex differenzierbar ist.

Abgabe: jeweils dienstags bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10