Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 30. April 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. [2 Punkte] Seien $X, Y \subseteq \mathbb{C}$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $f : X \to Y$ ist stetig

(b) $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ für alle Teilmengen $M \subseteq X$.

Hier bezeichnet $\overline{M}$ den Abschluss der Menge M.
Hinweis: Verwenden Sie, dass eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, d.h. $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}\left(\overline{A}\right)}$ *für alle* $A \subseteq Y$.

2. [2 Punkte] Sei $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jede Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ von f gilt:

$$|z_0| \leq 2 \cdot \max\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \ : \ k = 1, \ldots, n \right\}$$

3. (a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht-konstantes Polynom der Form $\sum_{k=0}^{n} b_k z^k$, $b_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, \ldots n$. Zeigen Sie, dass das Urbild jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ unter f wieder eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. *Hinweis: Aufgabe 2*

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht-konstanten stetigen Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und so einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$, dass $f^{-1}(K)$ nicht kompakt ist.

4. Bestimmen Sie die Werte $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgenden Reihen absolut konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log|z| + 2)^n}{3^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\log(n)}$

Abgabe: Ausnahmsweise am Montag, bis 14:15 in der Vorlesung, da Dienstag Feiertag.