

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 4. Juli 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

Besprechung dieses Übungsblattes am Freitag, den 6. Juli 2012, 14–16, in G.15.34

1. Berechnen Sie $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{p(z)} dz$, wobei das Polynom $p(z)$ eine einzige und zudem einfache Nullstelle in der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} haben soll und keine auf deren Rand $\partial\mathbb{D}$. Besteht ein Zusammenhang zwischen jenem Wegintegral und der Ableitung p' ?
2. Es seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f = \lambda \cdot g$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \leq 1$.
3. Finden Sie eine holomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eines Gebietes G mit nichtleerem Rand ∂G , so dass $|f|$ kein Maximum auf dem Rand annimmt.
4. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^5 + 7iz^3$. Berechnen Sie

$$\sup_{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1} |f(z)|$$

Wird das Supremum angenommen? An welchen Stellen?

5. Berechnen Sie für $a \in \mathbb{C}$:

$$g(a) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial(r\mathbb{D})} \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist g holomorph?

6. Bestimmen Sie die Anzahl Nullstellen folgender Polynome in folgenden Mengen:

- (a) $2z^4 + 5z + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$
- (b) $z^7 + 5z^4 + iz^2 + 2$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

7. Berechnen Sie die Laurentreihen von

$$\frac{4z - z^2}{(z + 1)(z^2 - 4)}$$

in den Kreisringen

- (a) $\{1 < |z| < 2\}$
- (b) $\{2 < |z|\}$
- (c) $\{0 < |z + 1| < 1\}$

Abgabe: jeweils mittwochs bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10