Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist

Abgabe: 27. Juni 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich und sei f_n eine Folge stetiger, integrabler Funktionen auf D, die in D kompakt gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch f integrabel ist.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich und sei $L \subset \mathbb{C}$ eine reelle Gerade. Zeigen Sie: Wenn $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und auf $D \setminus L$ holomorph ist, dann ist f auf D holomorph.

3. Seien G_1, G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ stetig. Für jeden geschlossenen Weg γ in G_1 bzw. G_2 gelte zudem für dieses f, dass $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = 0$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist, so gilt $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = 0$ für jeden geschlossenen Weg in $G_1 \cup G_2$.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel von G_1, G_2 und f mit nicht zusammenhängendem $G_1 \cap G_2$ und einem geschlossenen Weg γ in $G_1 \cup G_2$ derart, dass $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z \neq 0$.

4. Geben Sie ein Beispiel zwei komplexer Potenzreihen $f(z) := \sum_{j=0}^\infty c_j (z-a)^j$ und $g(z) := \sum_{j=0}^\infty d_j (z-a)^j$ an, sodass der Konvergenzradius von $\sum_{j=0}^\infty (c_j + d_j)(z-a)^j$ echt größer ist als das Minimum der Konvergenzradien von f und g.

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen f in Potenzreihen um 0 und bestimmen Sie die Konvergenzradien:

(a)
$$z \mapsto \frac{e^z}{1-tz}, \quad t \in \mathbb{C}$$

(b)
$$z \mapsto \frac{\sin^2(z)}{z}$$

6. Bestimmen Sie, ob es eine in 0 holomorphe Funktion f gibt, so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2-1}$

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}(0) = (n!)^2$

Abgabe: jeweils mittwochs bis 14:15 ins Postfach 103 auf D.10