Funktionentheorie Übungsblatt 1

Prof. Dr. N. Shcherbina, Dr. R. Andrist Abgabe: 19. April 2012

Sofern nicht anders vermerkt, kann bei jeder Teilaufgabe maximal ein Punkt erzielt werden.

1. Stellen Sie folgende Ausdrücke möglichst vereinfacht in der Form $\alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dar:

(a) [$^1/_2$ Punkt] $(3+5i)\cdot(2-7i)$

(b) [$^1/_2$ Punkt] $2e^{\frac{\pi}{2}i} + 3e^{-\frac{\pi}{2}i}$

(c) [$^1/_2$ Punkt] $\dfrac{4+7i}{2+3i}$

(d) $(i+1)^8$

(e) [$^1/_2$ Punkt] $\dfrac{(i+1)^4}{(i-1)^4}$

(f) $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^k$

2. Wir betrachten $\mathbb{C}$ einerseits als $\mathbb{C}$- und andererseits als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

(b) Identifizieren Sie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$ indem Sie $(1,i)$ als $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ wählen. Beschreiben Sie den Unterraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ in $\mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$.

$\mathrm{Hom}_K(X,Y)$ bezeichnet den Vektorraum der K-linearen Vektorraumhomomorphismen zwischen K-Vektorräumen X und Y.

3. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear sind. Schreiben Sie dann f als Summe einer Drehstreckung und einer Streckspiegelung und bestimmen Sie beiden positiven Streckfaktoren, den Drehwinkel und die Spiegelachse.

(a) $f(z) = i\cdot \mathrm{Re}(z)$

(b) $f(z) = z + i\overline{z}$

4. [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Identitätsabbildung und die komplexe Konjugation die einzigen stetigen Körperisomorphismen von $\mathbb{C}$ sind. *Hinweis: Untersuchen Sie das Bild von i.*

Abgabe: in dieser Woche am Donnerstag/Freitag zu Beginn der Übungsstunde, danach jeweils dienstags ins Postfach