Funktionentheorie I **SS06** **Shcherbina/Fischer**
2. Klausur **2. November**

---

1) (a) Gegeben seien ein Gebiet G und eine auf diesem Gebiet definierte Logarithmusfunktion log. Wir üblich definieren wir für alle $z \in \mathbb{C}$ und $w \in G$ die Potenz w^z durch $w^z := \exp(z \log w)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i. Für alle $w,\, z \in G$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt $w^\zeta \cdot z^\zeta = (w \cdot z)^\zeta$.

ii. Für alle $w \in G$ und $z,\, \zeta \in \mathbb{C}$ gilt $w^z \cdot w^\zeta = w^{z+\zeta}$.

(b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{3}{(z-1)(z+2)}$$

im Punkt 0 in eine Laurentreihe, die im Kreisring $A_{1,2}(0)$ konvergiert.

2) (a) Nennen Sie die Cauchy-Abschätzungen und zeigen Sie, wie man mit ihrer Hilfe den Satz von Liouville beweist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion f gibt, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant ist und für alle z die Abschätzung

$$|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Im} f(z)| < 2$$

erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass jede Funktion f, die auf dem Einheitskreis holomorph ist und die Beziehungen $f(0) = 1$ und

$$2 < |f(z)| < 3 \quad \text{für alle} \quad |z| = 1$$

erfüllt, im Einheitskreis auch eine Nullstelle hat.

3) (a) Gegeben seien ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ und ein Punkt $z \in \mathbb{C} \backslash |\gamma|$. Weiter sei der Weg $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\bar{\gamma}(t) := \overline{\gamma(t)}$. Beweisen Sie die folgende Beziehung.

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = -\operatorname{ind}_{\bar{\gamma}}(\bar{z})$$

(b) Finden Sie alle Paare reeller Zahlen (α, β) für die die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$\int_{\partial B_\alpha(0)} \bar{z}\, dz = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\beta}{z}\, dz$$

4) (a) Gegeben sei eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, die in 0 einen Pol $k$ter Ordnung hat. Beweisen Sie, dass die Funktion f' in 0 einen Pol der Ordnung $k+1$ hat.

(b) Bestimmen Sie die Typen aller Singularitäten der folgenden Funktionen:

$$f_1(z) := \frac{z^2 - \pi^2}{\sin(z)}, \quad f_2(z) := \frac{z}{e^z - 1}, \quad f_3(z) := z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$