Funktionentheorie I | **SS06** | **Shcherbina/Fischer**
1. Klausur | | **12. Juli**

1) (a) Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{2j}, \qquad g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 z^j, \qquad h(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 z^{2j}.$$

(b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - z - 2}$$

im Punkt 1 in eine Potenzreihe und bestimmen Sie deren Kovergenzradius.

2) (a) Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen komplex differenzierbar beziehungsweise holomorph sind.

$$f(z) = f(x + iy) = (x - 2y) + i(2x + y), \qquad g(z) = \overline{(i + \bar{z})^2}$$

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion f gibt, die auf dem Einheitskreis holomorph ist und dort für alle z die Abschätzungen

$$1 + 2|z|^2 < |f(z)| < 2 + |z|^2$$

erfüllt.

3) (a) Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_\gamma |z|^2 \, dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma z^2 \, dz$$

für die Wege $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_1(t) = -i \exp(\pi i t), \qquad \gamma_2(t) = 2it - i, \qquad \gamma_3(t) = -i \exp(-\pi i t).$$

(b) Gegeben seien ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Funktion $g(z) = z^n$. Zeigen Sie, dass $g \circ \gamma$ wieder ein geschlossener Weg ist und dass die Beziehung $\operatorname{ind}_{g\circ\gamma}(0) = n \cdot \operatorname{ind}_\gamma(0)$ gilt.

4) (a) Gegeben seien zwei Funktionen f und g, die in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph sind und in 0 einen Pol beziehungsweise eine wesentliche Singularität haben. Untersuchen Sie, von welchem Typ die Singularität in 0 der Funktion $f + g$ ist.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial B_2(k)} \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 + 1)(z - 2)} dz$$