Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. G. Herbort
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk

25.05.11

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie — Blatt 7

Aufgabe 1 (a) Sei R ein abgeschlossenes, achsenparalleles Rechteck. Zeigen Sie:

$$\operatorname{ind}_{\partial_+ R}(z) = 1, \text{ wenn } z \in R^\circ \quad \text{und} \quad \operatorname{ind}_{\partial_+ R}(z) = 0, \text{ wenn } z \notin R.$$

(b) Sei $G := \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Zeigen Sie, dass $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ auf G eine Stammfunktion besitzt.

(c) Seien γ ein Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g(z) = z^n$. Zeigen Sie: $\operatorname{ind}_{g\circ\gamma}(0) = n \cdot \operatorname{ind}_\gamma(0)$.

Aufgabe 2 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

Sei U_+ eine in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ offene Teilmenge in $\mathbb{C}$. Sei $f : U_+ \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $U_+ \setminus \mathbb{R}$, so dass f auf $U_+ \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt. Sei $U := U_+ \cup U_-$, wobei $U_- := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U_+\}$. Sei $F(z) := f(z)$ für $z \in U_+$ und $F(z) := \overline{f(\bar{z})}$ für $z \in U_-$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion auf U besitzt (und somit dort holomorph ist).

Aufgabe 3 Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(a) $$\int_{\partial_+ \Delta(0,2)} \frac{e^z dz}{(z+1)(z-3)^2}$$

(b) $$\int_{\partial_+ \Delta(0,2)} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

(c) $$\int_{\partial_+ \Delta(1,2)} \frac{e^{iz}}{(z-2)^3} dz$$

Aufgabe 4 Sei $\alpha > 1$. Berechnen Sie:

$$\int_{\partial_+ \Delta_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2\alpha z + 1} \quad \text{und dann} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha + \cos x}.$$

Abgabe: 01.06.11 auf D10, Fach Nr. 104 `www.math.uni-wuppertal.de/~herbort`
`www.kana.uni-wuppertal.de`