Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. G. Herbort
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk

04.05.11

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie Blatt 4

Aufgabe 1 (a) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die genau in den Punkten der imaginären Achse komplex differenzierbar ist.

(b) Sei h auf $\mathbb{C}$ definiert durch $h(z) := \sqrt{\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)}$. Zeigen Sie, dass h in 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dort aber nicht (komplex) differenzierbar ist.

Aufgabe 2 Seien $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad \text{und} \quad \cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right).$$

(a) Stellen Sie sin und cos als Potenzreihen dar.

(b) Zeigen Sie, dass sin und cos surjektiv, aber nicht injektiv sind.

Aufgabe 3 Entwickeln Sie folgende Funktionen in Potenzreihen um $z_0 = 0$. Geben Sie an, wo die Potenzreihen konvergieren.

$$f_1(z) = \frac{z^2}{1-z}, \quad f_2(z) = \frac{z+3}{z-2} \quad \text{und} \quad f_3(z) = e^z \cos(z).$$

Aufgabe 4 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) f konstant.

(b) $\mathrm{Re} f$ konstant.

(c) $|f|$ ist konstant.

(d) $\bar{f}$ holomorph.

Aufgabe 5 Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe, die gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \Delta_R(0)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann f ein Polynom sein muss.

Abgabe: Mi, 11.05.11 auf D10, Fach Nr. 104