Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. G. Herbort
Dipl.-Math. T. Pawlaschyk

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie Blatt 3

Aufgabe 1 (a) Sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie nicht-leerer, kompakter Mengen $K_i \subset \mathbb{C}$ mit $K_{i+1} \subset K_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ kompakt und nicht-leer ist.

(b) Seien $A, K \subset \mathbb{C}$ nicht-leer. Sei A abgeschlossen und K kompakt. Zeigen Sie, dass es dann $z_0 \in A$ und $w_0 \in K$ gibt mit

$$d(A,K) := \inf\{|z-w| : z \in A, w \in K\} = |z_0 - w_0|.$$

Gilt dies immer noch, wenn K nur abgeschlossen und nicht-leer ist?

Aufgabe 2 (a) Zeigen Sie, dass $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\bar{z}| < 1\}$ zusammenhängend ist.

(b) Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Kurve. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $\gamma_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : d(z,\gamma) < \varepsilon\}$ zusammenhängend ist.

(c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$. Beweisen Sie, dass auch $G \setminus \{a\}$ wieder ein Gebiet ist.

Aufgabe 3 Sei P ein komplexes Polynom. Beweisen Sie:

(a) Nimmt P einen Wert unendlich oft an, so ist P konstant.

(b) Nimmt P einen Wert nicht an, so ist P konstant.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Wirtingerableitungen folgender Funktionen.

(a) $f(z) = f(x+iy) = xy + \frac{i}{2}(y^2 - x^2 + 2)$,

(b) $g(z) = z\mathrm{Re}(z)$,

(c) $h(z) = (z^2 + 1 + |z|^2)^4$,

(d) $k(z) = \sin(\mathrm{Re}(z))e^{-\mathrm{Im}(z)}$.

(e) Überprüfen Sie die Funktionen f und g auf komplexe Differenzierbarkeit.

Abgabe: Mi, 04.05.11 auf D10, Fach Nr. 104 `www.math.uni-wuppertal.de/~herbort`
`www.kana.uni-wuppertal.de`