Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Apl. Prof. Dr. G. Herbort
Dipl. Math. T. Pawlaschyk

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie Blatt 2

Aufgabe 1 (a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^n z^n$.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}?$$

Bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2 Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_f bzw. r_g. Was lässt sich dann über die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ aussagen?

Aufgabe 3 Sei $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)^2 \mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Lassen sich f, g stetig auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen?

Aufgabe 4 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $M \neq \emptyset$. Definiere

$$d(z, M) = \inf\{|z-m| : m \in M\}$$

für $z \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie die Ungleichung: $|d(z,M) - d(w,M)| \leq |z-w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Folgern Sie, dass $d(\cdot, M)$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist.

(c) Berechnen Sie $d(\cdot, M)$ für den Fall $M = \partial\Delta(i, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 2\}$.

Aufgabe 5 Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $(z_n)_{n\geq 0}$ rekursiv definiert durch

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n - \frac{1}{z_n}\right).$$

Zeigen Sie, dass für $\mathrm{Im} z_0 > 0$ die Folge $(z_n)_n$ gegen i konvergiert.

Hinweis: Vergleichen Sie $\frac{z_{n+1}-i}{z_{n+1}+i}$ *mit* $\frac{z_n - i}{z_n + i}$. *Was ist* $\left|\frac{z_0 - i}{z_0 + i}\right|$*?*

Abgabe: 29.04.11 bis 14:00 auf D10, Fach Nr. 104