Bergische Universität Wuppertal SoSe11
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Apl. Prof. Dr. G. Herbort
Dipl. Math. T. Pawlaschyk

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie Blatt 1

Aufgabe 1 Sei $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass L genau dann $\mathbb{R}$-linear ist, wenn es Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $L(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

(b) Sei L aus *Teil a)*. Zeigen Sie: L bijektiv $\Leftrightarrow |\lambda|^2 \neq |\mu|^2$.

Aufgabe 2 Skizzieren Sie folgende Mengen:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq |z + i|\}$,

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = z\}$,

(c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(i\dfrac{1+z}{1-z}\right) > 0\}$.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie jeweils diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

(a) $z^2 = 1 - 2\sqrt{2}i$

(b) $z^5 = 1$,

(c) $z^4 = 8 + 8i$.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Häufungspunkte der nachstehenden Folgen:

(a) $z_n = \lambda^n (2 + 2i)^n$, für $\lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $w_n = \frac{1}{n^4}\mathrm{Im}(i + n)^5$.

(c) $a_n = \frac{1}{8^n}|(1 + i)^n| \cdot |2 + 2i|^n$

Aufgabe 5 Seien $n \geq 2$ und $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$. Zeigen Sie, dass das Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ keine Nullstelle besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $q(z) = (1 - z)p(z)$ und folgern Sie, dass für eine Nullstelle ζ von p die Ungleichung $|\zeta| \geq 1$ gilt und $|\zeta| = 1$ nicht sein kann.

Abgabe: Do, 21.04.11 bis 18:00 auf D10, Fach Nr. 104 `www.kana.uni-wuppertal.de`
`www.math.uni-wuppertal.de/~herbort`