1) (a) Es seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.
   i. Zeigen Sie, dass für alle A und B die Beziehung $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ gilt.
   ii. Zeigen Sie, dass für alle A und B die Beziehung $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$ gilt.
   iii. Finden Sie ein Beispiel, so dass die Beziehung $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (A \cup B)^\circ$ nicht gilt.

   (b) Gegeben seien eine positive reelle Zahl α und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^4 + y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Untersuchen Sie, für welche Werte α diese Funktion auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

2) (a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Zeigen Sie, dass für diese Funktion in Null alle Richtungsableitungen existieren, die Funktion aber nicht total differenzierbar ist.

   (b) Für zwei Vektoren x und y aus dem $\mathbb{R}^k$ sei $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^k x_j y_j$ das euklidische Skalarprodukt. Gegeben seien nun zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$\operatorname{Hess} h = \sum_{\nu=1}^{k} (g_\nu \cdot \operatorname{Hess} f_\nu + f_\nu \cdot \operatorname{Hess} g_\nu) + Df^T \cdot Dg + Dg^T \cdot Df$$

3) (a) Nennen Sie den Satz über implizite Funktionen und beweisen Sie den Umkehrsatz mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen.

   (b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^3y - 8xy + 2xy^3.$$

   Bestimmen Sie alle lokalen Extrema dieser Funktion und geben Sie jeweils auch deren Typ an.

4) (a) Geben Sie die Definition für die Lebesgue-Integrierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an und beweisen Sie die Aussage, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist.

   (b) Gegeben seien die Menge $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ und die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2^3$. Berechnen Sie das Integral $\int_S f(x)\,dx$.