1) (a) Es seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

   i. Zeigen Sie, dass für alle A und B die Beziehung $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ gilt.

   ii. Zeigen Sie, dass für alle A und B die Beziehung $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$ gilt.

   iii. Finden Sie ein Beispiel, so dass die Beziehung $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (A \cup B)^\circ$ nicht gilt.

   (b) Gegeben seien eine positive reelle Zahl α und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^4 + y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   Untersuchen Sie, für welche Werte α diese Funktion auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

$(3 + 1 + 1) + 5$ Punkte

Die Menge $\overline{A} \cup \overline{B}$ ist abgeschlossen und wegen $X \subset \overline{X}$ gilt auch $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Da der Abschluss die kleinste abgeschlossene Menge ist, die $A \cup B$ enthält, gilt also $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Andererseits folgt aus $A \subset A \cup B$ auch $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ und analog $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Damit gilt dann auch $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Die Menge $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ ist offen und wegen $\mathring{X} \subset X$ auch in $A \cup B$ enthalten. Da der offene Kern die größte offene Menge ist, die in $A \cup B$ liegt, gilt also $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$.

Ein Gegenbeispiel ist etwa $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$. Dann gilt $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$ aber $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}^2$.

Für $\alpha \leq 2$ ist die Funktion nicht stetig, wie man leicht mit Hilfe der Punkte $p_\varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon)$ sieht, an denen der Funktionswert jeweils $\varepsilon^{2\alpha}/(2\varepsilon^4) = \varepsilon^{2\alpha-4}/2$ ist. Für $\alpha \leq 2$ geht das nicht gegen Null. Für $\alpha > 2$ gilt dagegen wegen $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ die Beziehung $|f(x,y)| \leq |xy|^{\alpha-2}/2$ und für $|(x,y)| < \varepsilon$ folgt dann $|f(x,y)| \leq \varepsilon^{2\alpha-4}/2$ und das geht für $\varepsilon \to 0$ gegen Null.

2) (a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   Zeigen Sie, dass für diese Funktion in Null alle Richtungsableitungen existieren, die Funktion aber nicht total differenzierbar ist.

   (b) Für zwei Vektoren x und y aus dem $\mathbb{R}^k$ sei $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^k x_j y_j$ das euklidische Skalarprodukt. Gegeben seien nun zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und die Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$\operatorname{Hess} h = \sum_{\nu=1}^{k} (g_\nu \cdot \operatorname{Hess} f_\nu + f_\nu \cdot \operatorname{Hess} g_\nu) + Df^T \cdot Dg + Dg^T \cdot Df$$

---

5 + 5 Punkte

Für ein $v = (a, b) \neq 0$ haben wir

$$D_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{ta(tb)^2}{t((ta)^2 + (tb)^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Also existieren alle Richtungsableitungen und es gilt beispielsweise $D_{(1,1)} f(0) = 1/2 \neq 0 + 0 = D_{(1,0)} f(0) + D_{(0,1)} f(0)$. Für eine total differenzerbare Abbildung wäre aber $D_v f(0) = Df(0) \cdot v$ also $D_{(1,1)} f(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$. Damit ist f nicht total differenzierbar.

Wir haben $(\partial/\partial x_i) h(x) = \sum_{\nu=1}^k (\partial f_\nu / \partial x_i)(x) \cdot g_\nu(x) + (\partial g_\nu / \partial x_i)(x) \cdot f_\nu(x)$ und dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} h(x)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_j \partial x_i}(x) \cdot g_\nu(x) + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial^2 g_\nu}{\partial x_j \partial x_i}(x) \cdot f_\nu(x) + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}(x)$$

und indem wir die einzelnen Komponenten der Matrix betrachten erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

3) (a) Nennen Sie den Satz über implizite Funktionen und beweisen Sie den Umkehrsatz mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^3 y - 8xy + 2xy^3.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema dieser Funktion und geben Sie jeweils auch deren Typ an.

(2 + 3) + 5 Punkte

Es sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $\det(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es Umgebungen U von x_0 nd V von y_0 und eine Abbildung $g : U \to V$, so dass wir die Beziehung $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$ haben und außerdem gilt $\{F(x, y) = 0\} \cap U \times V = \{(x, g(x)) : x \in U\}$.

Zu einer gegebenen stetig differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) = y_0$ und $\det Df(x_0) \neq 0$ betrachten wir einfach $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(x, y) = x - f(y)$ mit $F(y_0, x_0) = 0$ und $\det(\partial F/\partial y)(y_0, x_0) = -\det Df(x_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann Umgebungen U von y_0 und V von x_0 und eine Abbildung $g : U \to V$ mit $F(x, g(x)) = x - f(g(x)) = 0$. Genauer gilt sogar $x = f(y) \Leftrightarrow y = g(x)$ für alle $(x, y) \in V \times U$. Also ist g eine lokale Umkehrfunktion.

Wir haben $f_x(x, y) = 6x^2 y - 8y + 2y^3 = 2y(3x^2 - 4 + y^2)$ und $f_y(x, y) = 2x^3 - 8x + 6xy^2 = 2x(x^2 - 4 + 3y^2)$. Damit haben wir die kritischen Punkte $(0, 0)$, $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$ und die gemeinsamen Lösungen von $3x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + 3y^2 = 4$, die da sind $x^2 = y^2 = 1$ also die vier Punkte $(\pm 1, \pm 1)$. Die Hessematrix ist $\begin{pmatrix} 12xy & 6x^2-8+6y^2 \\ 6x^2-8+6y^2 & 12xy \end{pmatrix}$. Damit ist sie an allen Punkten mit $xy = 0$ indefinit, so dass das keine Extrema sind. Für die beiden Punkte $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ haben wir $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ also wegen $\lambda = 12 \pm 4 > 0$ jeweils ein isoliertes lokales Minimum. Und für $(-1, 1)$ und $(1, -1)$ ergibt sich $\begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ also wegen $\lambda = -12 \pm 4 < 0$ jeweils ein isoliertes lokales Maximum.

4) (a) Geben Sie die Definition für die Lebesgue-Integrierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an und beweisen Sie die Aussage, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|$ Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Gegeben seien die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ und die Funktion $f(x) = x_1^2 x_2^3$. Berechnen Sie das Integral $\int_S f(x)\,dx$.

$(2 + 3) + 5$ Punkte

Die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die in der L^1-Halbnorm gegen f konvergieren.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und φ eine Treppenfunktion mit $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$, dann können wir die Treppenfunktion $|\varphi|$ betrachten und erhalten zunächst $|\,|f| - |\varphi|\,| \le |f - \varphi|$. Das bedeutet aber, dass jede Hüllreihe für $|f - \varphi|$ auch eine Hüllreihe für $|\,|f| - |\varphi|\,|$ ist und damit gilt $\|\,|f| - |\varphi|\,\|_1 \le \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion, die in der L^1-Halbnorm nah genug dran ist und damit ist $|f|$ ebenfalls integrierbar.

$$
\begin{aligned}
\int_S f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} x_1^2 x_2^3\,dx_1 \right) dx_2 = \int_0^1 \left(x_2^3 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{1-x_2} \right) dx_2 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (x_2 - x_2^2)^3\,dx_2 = \frac{1}{3} \int_0^1 x_2^3 - 3x_2^4 + 3x_2^5 - x_2^6\,dx_2 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{x_2^4}{4} - 3\frac{x_2^5}{5} + 3\frac{x_2^6}{6} - \frac{x_2^7}{7} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{420}
\end{aligned}
$$