1) (a) Nennen Sie die Überdeckungsdefinition der Kompaktheit und beweisen Sie nur unter Verwendung der Definition, dass eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ nicht unbeschränkt sein kann.

   (b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad y \in \mathbb{Q} \\ y & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad y \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Untersuchen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist.

2) (a) Gegeben seien eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, ein Punkt $p \in U$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt und geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

   i. Ist f in p total differenzierbar, dann ist f in p stetig.

   ii. Ist f in p partiell differenzierbar, dann ist f in p stetig.

   iii. Ist f in p partiell differenzierbar, dann ist f in p total differenzierbar.

   (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $(1, \dots, 1)$.

3) (a) Gegeben sei die Untermannigfaltigkeit $M = \{(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} : f(x,y) = 0\}$ zu einer differenzierbaren Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Df(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in M$. Zeigen Sie, dass dann auch die Rotationsfläche $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}) : f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit ist.

   (b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 2x.$$

   Bestimmen Sie alle lokalen Extrema dieser Funktion und geben Sie jeweils auch deren Typ an.

4) (a) Definieren Sie den Begriff einer Hüllreihe für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ und geben Sie an, wie die L^1-Halbnorm von f definiert wurde. Beweisen Sie, dass für zwei Funktionen f und g und eine reelle Zahl c die Beziehungen $\|cf\|_1 = |c|\,\|f\|_1$ und $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ gelten.

   (b) Für eine natürliche Zahl n und eine positive reelle Zahl r betrachten wir die Menge

$$S_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |x_j| < r\}.$$

   Zeigen Sie, dass das Volumen dieser Menge durch die Beziehung $\mathrm{vol}(S_n(r)) = 2^n r^n / n!$ gegeben ist.