Bergische Universität Wuppertal SoSe10
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. H. Pecher

Analysis II Klausur 23.07.10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = ye^{x^2} - xe^{y^2}.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkte $(1,1)$ in Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log |x|$. Berechnen Sie

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Bestimmen Sie die Maxima und Minima. Handelt es sich dabei um globale Extrema?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^2 + y + z$.

Zeigen Sie, dass f auf der Einheitssphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = x^2(\cos y, \sin y)$.

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_K x^2 dxdy.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x)dx = 0.$$

Dauer: 2 h
Hilfsmittel: keine
Bitte auf jeden Zettel den Namen und die Matrikelnummer angeben.