Bergische Universität Wuppertal SoSe10
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. Dr. H. Pecher

Analysis II Klausur 23.07.10
Musterlösungen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = ye^{x^2} - xe^{y^2}.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkte $(1,1)$ in Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Da die Funktion f unendlich of stetig differenzierbar ist, kann man diese Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten berechnen. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \left(2xye^{x^2} - e^{y^2}, e^{x^2} - 2xye^{y^2}\right) \quad \text{und} \quad \nabla f(1,1) = (e, -e).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi}(1,1) &= < \nabla f(1,1), \xi > \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} < (e,-e),(1,2) > \\ &= -\frac{e}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \log|x|$. Berechnen Sie

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Es sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{|x|^2 - 2x_i^2}{|x|^4}.$$

Daher ist

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = \frac{|x|^2 - 2x_1^2}{|x|^4} + \frac{|x|^2 - 2x_2^2}{|x|^4} = \frac{2|x|^2 - 2(x_1^2 + x_2^2)}{|x|^4} = 0$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Bestimmen Sie die Maxima und Minima. Handelt es sich dabei um globale Extrema?

Man erhält folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x(1-(x^2+2y^2))e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y(2-(x^2+2y^2))e^{-(x^2+y^2)} = (4y - 2yx^2 - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2 - 10x^2 - 4y^2 + 4x^4 + 8x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= (-12xy + 4x^3y + 8xy^3)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (4 - 20y^2 - 2x^2 + 4y^2x^2 + 8y^4)e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte sind dann $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Für die Hesse-Matrizen ergibt sich:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist die Matrix positiv definit, und damit hat f in $(0,0)$ ein lokales Minimum mit Wert $f(0,0) = 0$. Das Minimum ist auch global, denn $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$H(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist die Matrix negativ definit, und damit hat f in $(0,\pm 1)$ ein lokales Maximum mit Wert $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$. Die Maxima sind auch global, denn $f(x,y) \to 0$ für $|(x,y)| \to \infty$.

$$H(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist die Matrix indefinit, und damit hat f in $(\pm 1, 0)$ keine Extremstelle.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^2 + y + z$.

Zeigen Sie, dass f auf der Einheitssphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese.

Es ist mit $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 1, 1) \quad \text{und} \quad \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

Da $\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z) \neq 0$ für $(x,y,z) \neq 0$, hat $\nabla g(x,y,z)$ vollen Rang 1 für Punkte auf der Einheitssphäre. Somit ist der Satz über die Langrangeschen Multiplikatoren anwendbar.

Da die Einheitssphäre kompakt ist, hat f dort ein Minimum und ein Maximum. Sei (x,y,z) dieses Extremum. Dann gibt es einen Multiplikator λ mit

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda g(x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad (2x,1,1) = \lambda(2x,2y,2z).$$

Dies führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 2\lambda x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } \lambda = 1 \\ \left.\begin{aligned} 1 - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \end{aligned}\right\} \quad &\Rightarrow \quad 2\lambda(y - z) \ \Rightarrow \ \lambda = 0 \text{ oder } y = z \end{aligned}$$

Der Fall $\lambda = 0$ tritt nicht ein wegen $1 - 2\lambda y = 0$.

Fall: $x = 0$ und $y = z$.

Dann gilt mit der Nebenbedingung $2y^2 = 1$, also $z = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Als Funktionswerte erhält man

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}.$$

Fall: $\lambda = 1$ und $y = z$.

Wegen $1-2\lambda y = 0$ gilt $z = y = \frac{1}{2}$.

Mit der Nebenbedingung ist dann $x^2 = \frac{1}{2}$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Schließlich

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Die Funktion f erreicht also auf der Einheitssphäre Maxima bei $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit Maximum $\frac{3}{2}$ und ein Minimum bei $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ mit Minimum $-\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = x^2(\cos y, \sin y)$.

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist.

Wir betrachten die Determinante der Jacobi-Matrix von f:

$$\det Df(x,y) = \det \begin{pmatrix} 2x\cos y & -x^2 \sin y \\ 2x \sin y & x^2 \cos y \end{pmatrix} = 2x^3(\cos^2 y + \sin^2 y) = 2x^3 \neq 0$$

für $x \neq 0$.

Also ist f nach dem Unkehrsatz invertierbar in der Nähe aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$.

Für (x,y) mit $x = 0$ ist die Funktion f nicht lokal invertierbar, da für jedes $\varepsilon > 0$ die Punkte $(-\frac{\varepsilon}{2}, y)$, $(\frac{\varepsilon}{2}, y)$ in der Kugel um $(0,y)$ mit Radius ε liegen, aber

$$f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, y\right) = f\left(\frac{\varepsilon}{2}, y\right),$$

d.h. f ist in jeder noch so kleinen Umgebung um $(0,y)$ nicht injektiv.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_K x^2 dxdy.$$

Es ist mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_K x^2 dxdy &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (r\cos\varphi)^2 r d\varphi dr \\ &= \int_0^1 r^3 dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi \cos\varphi d\varphi \\
&= \underbrace{[\cos\varphi \sin\varphi]_{\varphi=-\pi}^{\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi \\
&= 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi.$$

Alternativ dazu kann man versuchen, die Integration über eine rotationssymmetrische Funktion zu erzwingen. Man beachte, das x^2 als Funktion in den Variablen x und y nicht rotationssymmetrisch ist, jedoch die die Funktion x^2+y^2.

Es ist mit Fubini:

$$\begin{aligned}
2\int_K x^2 dxdy &= \int_K (x^2 + x^2) dxdy \\
&= \int_K x^2 dxdy + \int_K x^2 dxdy \\
&= \int_K x^2 dxdy + \int_K y^2 dydx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_K x^2 dxdy + \int_K y^2 dxdy \\
&= \int_K x^2 + y^2 dxdy \\
&= 2\pi \int_0^1 r^2 \cdot r^{2-1} dr \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x) dx = 0.$$

Da sin stetig und cos beschränkt ist, gilt

$$\lim_{m\to\infty} \sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x) = 0$$

für (fast) alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zudem ist

$$\left|\sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x)\right| \leq \underbrace{\left|\sin\left(\frac{|x|}{m}\right)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos\left(m|x|\right)|}_{\leq 1} \cdot |f(x)| \leq |f(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da $f \in L^1$, ist auch $|f| \in L^1$, und somit ist $|f|$ eine L^1-Majorante für die Funktionenfolge $\left(\sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x)\right)_m$. Daher ist nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} \sin\left(\frac{|x|}{m}\right) \cos\left(m|x|\right) f(x) dx = 0$$