SS 2009 # Klausur zur Analysis 2 **Prof. Fritzsche**

Matr.-Nr.: **Name:**

1) Sei $f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{im Nullpunkt} \\ y^3/(x^2+y^2) & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

b) Berechnen Sie – wenn möglich – die Richtungsableitung von f im Nullpunkt in Richtung $\mathbf{u} := (1,2)$.

c) Ist f im Nullpunkt total differenzierbar?

2) Bestimmen Sie alle Extremwerte und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) := (2x^2 + 3y^2) \cdot \exp(-x^2 - y^2).$$

3) Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von $f(x,y,z) := x + 2y + 3z$ auf S.

b) Begründen Sie sorgfältig, warum S eine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^3$ ist.

4) Seien $a, b > 0$ und $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_E (x^2 - y)\, dV_2.$$

Nützliche Formeln: Mit $x = a\cos t$ ist $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$, und es ist $\int (\cos^2 t \sin^2 t)\, dt = t/8 - \sin(4t)/32 + C$.

5) Beantworten Sie möglichst viele der folgenden Fragen:

a) Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1 \text{ und } xy \ne 0\}$. Wie sehen dann $\overline{M}$ und ∂M aus?

b) Sei f eine differenzierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Was versteht man unter $Df(\mathbf{a})$? Wie sieht $Df(a)$ im Falle $n = 1$ aus?

c) Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Was steht in den 4 Ecken der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x})$? Können diese 4 Zahlen alle verschieden sein? Wann ist die Matrix positiv definit?

d) Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine differenzierbare Abbildung. Wie ist $\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|_{\text{op}}$ definiert?

e) Wie kann man $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ durch eine Folge von abgeschlossenen Intervallen I_ν überdecken, so dass $\sum_\nu \ell(I_\nu) \le 1/2$ ist?

f) Sei (c_ν) eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen. Kann man Levi's Satz von der monotonen Konvergenz auf die Folge der konstanten Funktionen $f_\nu(\mathbf{x}) \equiv c_\nu \cdot \chi_{[-\nu,\nu]}$ anwenden?

Afg:	1	2	3	4	5	Σ
Punkte:	10	10	10	12	18	60
erreicht:						

Aufgabenblatt bitte mit den Lösungen abgeben!

Lösungen:

1) a) Es ist $f(x,0) \equiv 0$ und $f(0,y) \equiv y$. Also ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar und $f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = 1$.

b) Es ist

$$\frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3v^3}{t(t^2u^2 + t^2v^2)} = \frac{v^3}{u^2+v^2}\,,$$

im Falle $\mathbf{u} = (u,v) = (1,2)$ also

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2t) - f(0,0)}{t} = \frac{8}{5}\,.$$

c) Wäre f im Nullpunkt total differenzierbar, so wäre $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \bullet \mathbf{u} = u \cdot f_x(0,0) + v \cdot f_y(0,0) = u \cdot 0 + v \cdot 1 = v = 2$. WS!

2) Es ist $\nabla f(x,y) = (4x - 4x^3 - 6xy^2, 6y - 4x^2y - 6y^3)e^{-x^2-y^2}$, also

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff 2x(2 - 2x^2 - 3y^2) = 2y(3 - 2x^2 - 3y^2) = 0$$

$$\iff (x = y = 0) \text{ oder } (x = 0 \text{ und } y^2 = 1) \text{ oder } (y = 0 \text{ und } x^2 = 1.$$

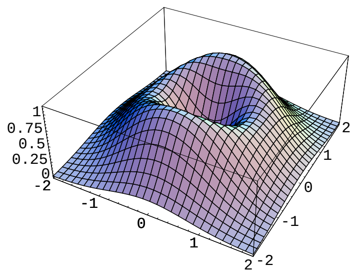
Weiter ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - 20x^2 + 8x^4 - 6y^2 + 12x^2y^2 & -20xy + 8x^3y + 12xy^3 \\ -20xy + 8x^3y + 12xy^3 & 6 - 4x^2 - 30y^2 + 8x^2y^2 + 12y^4 \end{pmatrix} \cdot e^{-x^2-y^2}.$$

Weil $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ positiv definit ist, liegt in $(0,0)$ ein Minimum vor.

Weil $H_f(\pm 1,0) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ indefinit ist, sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Sattelpunkte.

Weil $H_f(0,\pm 1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ negativ definit ist, liegen Maxima in $(0,1)$ und $(0,-1)$ vor.



3) a) Hier gibt es die zwei Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) := x + y + z = 0$ und $g_2(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Es ist

$$\nabla f = (1,2,3), \quad \nabla g_1 = (1,1,1) \quad \text{ und } \nabla g_2 = (2x, 2y, 2z).$$

Sei $\mathbf{F} := (g_1, g_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$J_{\mathbf{F}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

hat nur dann einen Rang < 2, wenn $x = y = z$ ist. Für einen Punkt $(x, y, z) \in S = \mathbf{F}^{-1}(0, 0)$ kann das nur dann eintreten, wenn $x = y = z = 0$ ist. Aber dann wäre $1 = 0$, WS! Also kann man den Satz über Extremwerte mit Nebenbedingungen anwenden. Mit den Lagrange'schen Multiplikatoren λ und μ ergibt sich das Gleichungssystem

$$1 = \lambda + 2\mu x, \quad 2 = \lambda + 2\mu y \quad \text{und} \quad 3 = \lambda + 2\mu z.$$

Außerdem müssen die Nebenbedingungen erfüllt sein.

Addition der Gleichungen ergibt $\lambda = 2$ und daher die Gleichungen

$$\mu x = -1/2, \quad \mu y = 0 \quad \text{und} \quad \mu z = 1/2.$$

Also muss $y = 0$ sein, $\mu \neq 0$, $x = -1/2\mu$ und $z = 1/2\mu$. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist $1/2\mu^2 = 1$, also $\mu = \pm 1/\sqrt{2}$. So erhält man die beiden Kandidaten

$$\mathbf{x}_1 := (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 := (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}).$$

Weil auf der kompakten Menge $g_1 = g_2 = 0$ Maximum und Minimum angenommen werden müssen und $f(\mathbf{x}_1) = -\sqrt{2} < \sqrt{2} = f(\mathbf{x}_2)$ ist, liegt in $\mathbf{x}_1$ das (globale) Minimum und in $\mathbf{x}_2$ das (globale) Maximum vor.

b) Die Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) : g_2(x, y, z) = 0\}$ sieht nach dem Satz über implizite Funktionen lokal wie der Graph einer differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus. Da sie kompakt ist, kann sie mit endlich vielen offenen Umgebungen überdeckt werden, in denen sie ein solcher Graph und damit eine Nullmenge ist. Damit ist sie selbst und dann erst recht die Teilmenge S eine Nullmenge im $\mathbb{R}^3$.

4) $E = \{(x, y) \in [-a, a] \times \mathbb{R} : |y| \leq b\sqrt{1 - (x/a)^2}\}$ ist ein Normalbereich. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2 - y)\, dV_2 &= \int_{-a}^{a} \Big(\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} (x^2 - y)\, dy \Big)\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \Big((x^2 y - y^2/2) \Big|_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}} \Big)\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \Big(x^2 b\sqrt{1-(x/a)^2} - \frac{b^2}{2}\big(1 - (x/a)^2\big) + x^2 b\sqrt{1-(x/a)^2} + \frac{b^2}{2}\big(1 - (x/a)^2\big) \Big)\, dx \\
&= 2b \int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{1-(x/a)^2}\, dx \;=\; \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \varphi(t) := a\cos t$ (und $\varphi'(t) = -a \sin t$) erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_{\arccos(0)}^{\arccos(1)} \varphi(t)^2 \sqrt{a^2 - \varphi(t)^2}\, \varphi'(t)\, dt \\
&= -a^4 \int_{\pi/2}^{0} \cos^2 t \sin^2 t\, dt \\
&= -a^4 \int_{\pi/2}^{0} \big(\cos^2 t - \cos^4 t\big)\, dt \\
&= a^4 \Big(\frac{t}{8} - \frac{\sin(4t)}{32} \Big) \Big|_0^{\pi/2} \;=\; a^4 \frac{\pi}{16}\,.
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das die Gleichung

$$\int_E (x^2 - y)\, dV_2 = \frac{4a^3b}{16}\pi = \frac{a^3b}{4}\pi.$$

5) a) $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ und
$\partial M = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 < 1 \text{ und } xy = 0\}$. Die Gleichung $xy = 0$ bedeutet, dass (x,y) auf dem Achsenkreuz liegt.

b) $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die totale Ableitung von f in $\mathbf{a}$, eine **lineare Abbildung** mit der Eigenschaft, dass $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + r(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ und $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\| = 0$ ist.

Im Falle $n = 1$ ist $Df(a)$ die durch $Df(a)(v) = f'(a) \cdot v$ gegebene lineare Funktion. Lernen Sie doch bitte endlich den Unterschied zwischen linearer Abbildung und beschreibender Matrix (bezüglich einer vorher festzulegenden Basis)! In unendlich-dimensionalen Räumen gibt es lineare Abbildungen, aber keine Matrizen!

c) $f_{x_1x_1}(\mathbf{x})$, $f_{x_1x_5}(\mathbf{x}) = f_{x_5x_1}(\mathbf{x})$, $f_{x_5x_5}(\mathbf{x})$. Die Werte können nicht alle verschieden sein. Die Matrix ist positiv definit, falls alle ihre Eigenwerte positiv sind.

d) Es ist $\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|_{\text{op}} = \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{\text{op}}$ und $\|L\|_{\text{op}} = \sup\{\|L(\mathbf{v})\| \,:\, \|\mathbf{v}\| \leq 1\}$, zusammen also

$$\|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|_{\text{op}} = \sup\{\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{v})\| \,:\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|\mathbf{v}\| \leq 1\}.$$

e) $M := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Menge, $M = \{x_\nu \,:\, \nu \in \mathbb{N}\}$. Dann sei
$I_\nu := [x_\nu - 1/2^{\nu+2}, x_\nu + 1/2^{\nu+2}]$. Die I_ν überdecken M. Außerdem ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \ell(I_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{2}\,.$$

Einige Experten haben mit Intervallen der Länge 0 gearbeitet, was auch geht.

f) Sei $c := \lim_{\nu\to\infty} c_\nu$. Dann konvergiert (f_ν) punktweise gegen die Funktion $f(x) \equiv c$. Diese Funktion ist nicht integrierbar, wenn $c \neq 0$ ist. Den Satz von Levi kann man nicht anwenden, weil die Folge der Integrale $I(f_\nu) = c_\nu \cdot 2\nu$ unbeschränkt ist.