Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Gegeben sei die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (t^2 - 1, t - t^3)$.

a) Zeigen Sie, dass das Bild der Kurve genau die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 - x^3 = 0\}$ ist.

b) Untersuchen Sie, an welchen Stellen es eine Funktion g gibt, so dass die Kurve lokal in der Form $y = g(x)$ geschrieben werden kann.

c) Untersuchen Sie, an welchen Stellen es eine Funktion h gibt, so dass die Kurve lokal in der Form $x = h(y)$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Funktionen $F_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ für jede reelle Zahl c durch

$$F_c(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z + c \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie für jeden Wert von c fest, an welchen Stellen sich die Menge $N_c = \{(x, y, z) : F_c(x, y, z) = 0\}$ lokal als Funktion von x schreiben läßt.

b) Geben sie eine solche lokale Auflösung in einer Umgebung des Punktes $(0, 0, 1) \in N_{-1}$ explizit an.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie fest, an welchen Punkten diese Funktion eine lokale Inverse besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F surjektiv ist und jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte hat.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy.$$

Gesucht sind alle Extrema auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Bestimmen sie die lokalen Extrema im Innern der Kreisscheibe und untersuchen Sie dann die Funktion unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 22.06.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.