Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Gegeben seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

a) Beweisen Sie die Beziehung $\mathrm{Hess}\,(f+g) = \mathrm{Hess}\,(f) + \mathrm{Hess}\,(g)$.

b) Bestimmen sie die Hessematrix $\mathrm{Hess}\,(f \cdot g)$ des Produktes von f und g.

c) Bestimmen sie die Hessematrix $\mathrm{Hess}\,(h \circ g)$ der Komposition von h und g.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der folgenden Funktionen und untersuchen Sie, welche der Extrema isoliert sind.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := (x^2 + 9y^2)\exp(-x^2 - 9y^2)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) := x^4(y^2 - 4)$

Aufgabe 3. Gegeben seien zwei natürliche Zahlen k und l mit $k \leq l$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine l-mal stetig differenzierbare Funktion, die homogen vom Grade k ist, also die Beziehung $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass das Taylorpolynom von f die folgende Darstellung hat.

$$T_{f,0,l}(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der folgenden Funktionen.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \sin(x+y) - \sin(x-y)$
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) := 12x^2y - 12xy + 4y^3$
3. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := (1 - |x|)^2$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 08.06.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.