

Analysis II (SS 2011)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (x + 2y, 2x - y) \\g(x, y) &= xy.\end{aligned}$$

Bestimmen sie die Differentiale (Jacobimatrizen) von f , g und $g \cdot f$.

Aufgabe 2. Gegeben seien die folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & f(x, y) &:= (x + y, x - y, xy) \\g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & g(x, y, z) &:= (xyz, x^2 + y^2 + z^2) \\h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^1, & h(x, y) &:= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\j : \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & j(x) &:= (x, x)\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Jacobimatrizen von f , g und j und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von h .
- Bestimmen Sie die Jacobimatrizen der Kompositionen $f \circ g$, $g \circ f$ und $h \circ j$.
- Begründen Sie, warum man für $D(h \circ j)$ nicht die Kettenregel verwenden kann.

Aufgabe 3. Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} e^x e^{-y} e^z \\ e^{-x} e^y e^{-z} \end{pmatrix} \\g(x, y) &= \begin{pmatrix} \sin(x + y) \\ \cos(x + y) \\ \log(x + y) \end{pmatrix} \\h(x, y, z) &= (x^2 + y^2)z\end{aligned}$$

Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}(h \circ g \circ f)(x, y, z)$.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass im Punkt $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen existieren, die Funktion aber dennoch nicht total differenzierbar ist.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 25.05.2011, 10 Uhr**, in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.