Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie, dass jede wegzusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ auch zusammenhängend ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x,y) : 0 < x < 1/\pi,\ y = \sin(1/x)\}$$

in $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

c) Zeigen Sie, dass jede offene, zusammenhängende Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ auch wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgende, auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass die Reihenfolge der Ableitungen dabei aber nicht vertauscht werden kann.

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgende, auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion stetig und überall partiell differenzierbar aber dennoch im Punkt 0 nicht total differenzierbar ist.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgende, auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion in 0 total differenzierbar, die partiellen Ableitungen aber nicht stetig sind.

$$f(x) := \begin{cases} x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) & \text{für } x_1 \neq 0 \text{ und } x_2 \neq 0 \\ x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) & \text{für } x_1 \neq 0 \text{ und } x_2 = 0 \\ x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \end{cases}$$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 18.05.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.