Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Für endlich viele Mengen $M_1, \ldots, M_k \subset \mathbb{R}$ ist das Kreuzprodukt dieser Mengen definiert als

$$M_1 \times \cdots \times M_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, k\}.$$

Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $A_1 \times \cdots \times A_k$ in $\mathbb{R}^k$ abgeschlossen ist, falls alle Mengen $A_1, \ldots, A_k$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt.

b) Das Bild jeder kompakten Menge ist kompakt.

c) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

d) Das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

e) Das Urbild jeder beschränkten Menge ist beschränkt.

f) Das Bild jeder beschränkten Menge ist beschränkt.

Aufgabe 3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. Offenheit, Abgeschlossenheit, Kompaktheit und Beschränktheit einer Menge M in V seien analog zum Falle des $\mathbb{R}^n$ definiert.
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge des Vektorraumes V genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Hinweis: Man kann die Behauptung mit Hilfe eines Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ auf den Fall $V = \mathbb{R}^n$ zurückführen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die folgende, auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion überall partiell differenzierbar aber dennoch im Punkt 0 nicht stetig ist.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 11.05.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.