Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und Abbildungen auf Stetigkeit.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x,y) = \begin{cases} (2xy, x^2 - y^2) & \text{für} \quad x \leq y, \\ (x^2 + y^2, 0) & \text{für} \quad x > y. \end{cases}$$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$h(t) = \begin{cases} (t + 2\pi, 0) & \text{für} \quad t < -2\pi, \\ (\sin t, 1 - \cos t) & \text{für} \quad -2\pi \leq t < 0, \\ (\sin t, \cos t - 1) & \text{für} \quad 0 \leq t < 2\pi, \\ (t - 2\pi, 0) & \text{für} \quad 2\pi \leq t. \end{cases}$$

Aufgabe 2.

a) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n : (1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{x^n}, \frac{x^2}{n} \right).$$

Untersuchen Sie die Folge auf gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz.

b) Gegeben sei die Funktionenfolge $(g_n)_n$ mit $g_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) = \frac{1}{n|x|}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3.

a) Gegeben seien zwei Mengen A und B mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann für die Durchmesser die Beziehung $\max(d(A), d(B)) \leq d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$ gilt.

b) Gegeben sei eine Folge beschränkter Mengen $(M_i)_i$ mit $M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset$ und $d(M_i) \to 0$ für $i \to \infty$. Untersuchen Sie, ob die Menge $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ auch wieder beschränkt ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Die folgenden Mengen sind alle nicht kompakt. Finden Sie zu jeder Menge eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

a) $A \subset \mathbb{R}^2$ mit $A = \{(x, y) : |xy| \leq 1\}$

b) $B \subset \mathbb{R}^3$ mit $B = \overline{B}(0, 1) \setminus \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$

c) $C \subset \mathbb{R}^4$ mit $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i\} \setminus \mathbb{Z}^4$

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 04.05.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.