

Analysis II (SS 2011)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Punktfolgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an.

- a) $x_n \in \mathbb{R}^2$ mit $x_n = (\frac{1}{n} \cos n, \frac{1}{n} \sin n)$
- b) $z_n \in \mathbb{R}^2$ mit $z_0 = (1, 1)$ und $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = ((x_n - y_n)/2, (x_n + y_n)/2)$
- c) $x_n \in \mathbb{R}^3$ mit $x_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, (-1)^n)$
- d) $x_n \in \mathbb{R}^3$ mit

$$x_n = \left(\frac{\log(n!)}{\sqrt{n^3}}, \frac{(-1)^{n!} [\log n]}{(-1)^{[\log n]} n!}, \frac{\log(n^2)}{\log(2n)} \right)$$

Aufgabe 2.

- a) Gegeben seien die Menge $I = [0, 1)$ und die Abbildung $d^\circ : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d^\circ(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$. Zeigen Sie, dass d° auf I eine Metrik ist.
- b) Für einen Punkt $c \in I = [0, 1)$ definieren wir die Abbildung $f_c : I \rightarrow I$ durch

$$f_c(x) = \begin{cases} x + c & \text{für } x + c < 1, \\ x + c - 1 & \text{für } x + c \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass mit der in (a) definierten Metrik die Beziehung $d^\circ(f_c(x), f_c(y)) = d^\circ(x, y)$ gilt.

Aufgabe 3. Mit $\{x\} = x - [x]$ bezeichnen wir hier den gebrochenen Anteil einer reellen Zahl x . Für zwei reelle Zahlen a und b definieren wir dann die Folge $(z_n)_n \subset \mathbb{R}^2$ durch $z_n = (\{na\}, \{nb\})$. Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge für die folgenden Situationen:

$$(i) a = b = \frac{1}{3} \quad (ii) a = \frac{1}{3} \text{ und } b = \frac{1}{5} \quad (iii) a = \frac{1}{3} \text{ und } b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 4.

- a) Gegeben sei die Menge $C([0, 1])$, aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen, mit der Metrik $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. Zeigen Sie, dass $C([0, 1])$ bezüglich dieser Metrik vollständig ist.
- b) Gegeben sei die Menge $C([0, 1])$, aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen, mit der Metrik $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$. Zeigen Sie, dass $C([0, 1])$ bezüglich dieser Metrik nicht vollständig ist.
(Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n(x) = x^n$.)

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 27.04.2011, 10 Uhr**, in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.