Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Gegeben seien die Treppenfunktionen f_n, $g_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x,y,z) \in (0,\frac{1}{n}) \times (-1,1) \times (-\frac{1}{n},0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_n(x,yz) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{für} \quad (x,y,z) \in (-n,0) \times (-1,1) \times (0,n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die punktweisen Grenzfunktionen $\tilde{f}$ beziehungsweise $\tilde{g}$ der Funktionenfolgen $(f_n)_n$ beziehungsweise $(g_n)_n$.

b) Zeigen Sie, dass die f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergieren, dass aber gilt:

$$\|f_n - \tilde{f}\|_1 := \int_{\mathbb{R}^3} |f_n - \tilde{f}| dxdydz \to 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die g_n gleichmäßig gegen $\tilde{g}$ konvergieren, dass aber nicht die Beziehung $\|g_n - \tilde{g}\|_1 \to 0$ gilt.

Aufgabe 2. Gegeben seien die Mengen $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_3| < 1,\, x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\}$ und $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, x_3 > 0,\, x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$. Berechnen Sie die folgenden beiden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_K(x)\, dx \qquad \int_S x_1^2 x_2^2 x_3^2\, dx$$

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Integrale $F(x) := \int_0^1 f(x,y)dy$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Begründen Sie, warum $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie:

$$F'(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)dy.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass $\Psi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ mit

$$\Psi(r, \varphi, h) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)$$

bijektiv ist, in dem Sie eine Umkehrabbildung angeben.

b) Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ein Zylinder. Berechnen Sie

$$\int_Z (zx^4 + zy^4)\; dxdydz$$

mit Hilfe der Zylinderkoordinaten aus Teil a).

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 06.07.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.