Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Gegeben sei die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := (y - x^2) \cdot (y - 3x^2)$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Punkt $(0,0)$ im Nullpunkt ein lokales Minimum hat.

b) Berechnen Sie $Df(0,0)$ und $\operatorname{Hess} f(0,0)$.

c) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum hat.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Mengen Untermannigfaltigkeiten sind und geben Sie jeweils für jeden Punkt der Untermannigfaltigkeit eine lokale Parametrisierung an.

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\} \\ B &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - 1)^2 + z^2 = 0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Parametrisierungen von Untermannigfaltigkeiten sind.

$$\phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \phi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(s)\cos(t) \\ \cos(s)\sin(t) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

$$\psi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \psi(s,t) = \begin{pmatrix} \sin(s) \\ t \\ \cos(s) \end{pmatrix}$$

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \rho(s,t) = \begin{pmatrix} t \\ st \\ s^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \frac{[nx]}{n} + \frac{[ny]}{n} & \text{für } (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $[\cdot]$ hier die Gaußklammer bezeichnet. Bestimmen Sie die Integrale dieser Treppenfunktionen.

Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 29.06.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.