Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II (SS 2011)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}$ mit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ eine Norm ist.

b) Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1 : V \to \mathbb{R}$ mit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ eine Norm ist.

c) Gegeben sei der Vektorraum $V = C([a,b])$, der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ eine Norm ist.

d) Gegeben sei der Vektorraum $V = C([a,b])$, der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1 : V \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ eine Norm ist.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit. Geben Sie jeweils auch die abgeschlossene Hülle und den offenen Kern dieser Mengen an.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\}$

c) $C = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} B\left((t,0,0,0), t/\sqrt{2}\right) \subset \mathbb{R}^4$

d) $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B\left((1/n)\cdot(1,1,1,1,1), 5/n\right) \subset \mathbb{R}^5$

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

a) Für alle Mengen M gilt $\overset{\circ}{\overline{M}} \subset M$.

b) Für alle Mengen M gilt $\overset{\circ}{\overline{M}} \supset M$.

c) Für alle Mengen M gilt $\overline{\overset{\circ}{M}} \subset M$.

d) Für alle Mengen M gilt $\overline{\overset{\circ}{M}} \supset M$.

e) Für alle Mengen M gilt $\partial M \subset \partial\overline{M}$.

f) Für alle Mengen M gilt $\partial\overset{\circ}{M} \subset \partial M$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Wie üblich sei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$ die zugehörige Metrik und $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$ die euklidische Kugel um x mit dem Radius r. Weiter betrachten wir die Norm $\|x\|_* := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, die dazugehörige Metrik $d_*(x,y) = \|x-y\|_*$ und die entsprechenden Kugeln $B_*(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_*(x,y) < r\}$. Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ $*$-offen, wenn es für jeden Punkt $x \in A$ eine positive Zahl $r > 0$ gibt, so dass $B_*(x,r) \subset A$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $s > 0$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Beziehung $B(x,r) \subset B_*(x,s)$ für alle x in $\mathbb{R}^n$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $r > 0$ ein $s > 0$ gibt, so dass die Beziehung $B_*(x,s) \subset B(x,r)$ für alle x in $\mathbb{R}^n$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann $*$-offen ist, wenn sie offen ist.

Wichtige Hinweise: Es gilt Einzelabgabe, gemeinsame Abgabe in Gruppen ist nicht erlaubt. Abgabe dieses Blattes muss bis **Mittwoch, den 20.04.2011, 10 Uhr,** in das Postfach Ihrer Übungsgruppe auf Flur D.13 erfolgen.