Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Lösungsvorschlag Übungsblatt 3

Aufgabe 4) Sei $(f_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann ist auch $g_n := \dfrac{f_1 + \cdots + f_n}{n}$ gegen Null konvergent.

Beweis Sei $\epsilon_0 > 0$. Wegen der Konvergenz der Folge (f_n) gibt es einen Startindex $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n| < \epsilon_0 \quad \forall n \geq n_0$.

Zu zeigen ist nun: Für jedes $\epsilon_1 > 0$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|g_n| < \epsilon_1$ für alle $n \geq n_1$ ist.

Ohne Einschränkung sei $n_1 > n_0$. Dann ist für $n \geq n_1$ gerade

$$
\begin{aligned}
&|g_n| = \left| \frac{f_1 + \cdots + f_{n_0}}{n} + \frac{f_{n_0+1} + \cdots + f_n}{n} \right| \\
&\leq \frac{|f_1 + \cdots + f_{n_0}|}{n} + \frac{|f_{n_0+1} + \cdots + f_n|}{n} \\
&\leq \frac{|f_1| + \cdots + |f_{n_0}|}{n} + \frac{|f_{n_0+1}| + \cdots + |f_n|}{n} \\
&< \frac{|f_1| + \cdots + |f_{n_0}|}{n} + \frac{(n-n_0)\epsilon_0}{n} \\
&\leq \frac{|f_1| + \cdots + |f_{n_0}|}{n} + \epsilon_0 \\
&\leq \frac{n_0 \cdot \max_{i=1,\cdots,n_0} |f_i|}{n} + \epsilon_0 \\
&\leq \frac{n_0 \cdot \max_{i=1,\cdots,n_0} |f_i|}{n_1} + \epsilon_0 \\
&\leq \epsilon_0 + \epsilon_0 \qquad (\text{für } n_1 > \max_{i=1,\cdots,n_0} |f_i| \cdot n_0 \cdot \tfrac{1}{\epsilon_0}) \\
&= 2\epsilon_0
\end{aligned}
$$

Für $\epsilon_0 \leq \dfrac{\epsilon_1}{2}$ folgt sofort die Behauptung.