Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Lösungsvorschlag Übungsblatt 2

Aufgabe 4) Zu je zwei reellen Zahlen $a < b$ gibt es eine rationale Zahl q, mit $a < q < b$.

Beweis Seien ohne Einschränkung $a < b$ positive Zahlen. Wegen dem archimedischen Axiom gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $na < m \iff a < m/n$. m ist endlich, daher kann man ein $m_0 \leq m$ minimal wählen, so dass immer noch $a < m_0/n \leq m/n$ gilt.

Wegen $b > a$ ist $b - a > 0$. Wähle nun $n_0 > n$ derart, dass $n_0 b - n_0 a > 1$, also $b - a > 1/n_0$ ist. Dann gibt es wieder ein minimales $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $a < m_1/n_0$. Weiter gilt $b > a + 1/n_0 \geq m_1/n_0$, denn $(m_1 - 1)/n_0 \leq a$ wegen der Minimalität von m_1. Setze nun $q := m_1/n_0$.