Prof. Dr. N. Shcherbina
Dr. J. Ruppenthal
Bergische Universität Wuppertal

Analysis I (WS 2010/2011)

Lösungsvorschlag Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Teil a)

i) Zu zeigen: für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dies wollen wir mit vollständiger Induktion über n machen.

Induktionsanfang, $n = 1$: Eigentlich ist klar, weswegen der Induktionsanfang gilt; trotzdem wollen wir es formal aufschreiben:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

Induktionsschritt, $n - 1 \mapsto n$: Bei Aussagen mit Summen ist es meistens leicht zu erkennen, wie man die Induktionsvoraussetzung benutzen kann; man kann nämlich die ersten Summanden dafür verwenden.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \overset{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{(n+1)-1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Unter Vorbehalt der Aufgabenstellung könnte man die Aussage auch ohne vollständige Induktion beweisen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

ii) Sei m eine beliebige natürliche Zahl. Wir zeigen mit vollständiger Induktion über n: für jedes $n \geq m$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Induktionsanfang, $n = m$: Dieser ergibt sich aus der Gleichung

$$\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$$

Induktionsschritt, $n-1 \mapsto n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} + \binom{n}{m} \overset{\text{I.V.}}{=} \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} \\
&= \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n-m} \right) \\
&= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} \cdot \frac{(n-m)+(m+1)}{(m+1)(n-m)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} \\
&= \binom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1. Teil b)

Gegeben ist die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} : \, 3^n > 2n^3 \right\}. \tag{1}$$

Ziel ist es, diese Menge möglichst einfach darzustellen. Dazu sehen wir uns zunächst an, wie sich der Wahrheitswert der Bedingung

$$3^n > 2n^3$$

für kleine n verhält, um ein Gefühl für die Menge zu bekommen. Ist diese Bedingung erfüllt, so liegt das dazu passende Element n in der Menge M.

n	3^n	$2n^3$	Wahrheitswert der Aussage $3^n > 2n^3$
1	3	2	w
2	9	16	f
3	27	54	f
4	81	128	f
5	243	250	f
6	729	432	w
7	2187	686	w

Offenbar liegt die Vermutung nahe, dass die Aussage für alle $n \geq 6$ wahr wird und das jeweilige n damit in der Menge liegt. Dies gilt es zu beweisen. Dazu verwenden wir eine **vollständige Induktion**:

Zu zeigen:

$$3^n > 2n^3 \qquad \forall\, n \geq 6. \tag{2}$$

Induktionsanfang: $n = 6$
Damit folgt dann:

$$3^n = 3^6 = 729 > 432 = 2 \cdot 6^3 = 2n^3 \tag{3}$$

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsschritt von $n \to n+1$:
Wir dürfen (müssen) die Gleichung

$$3^n > 2n^3 \tag{4}$$

verwenden, um zu zeigen, dass

$$3^{n+1} > 2\left(n+1\right)^3 \tag{5}$$

gilt. Wir starten auf der linken Seite.

$$\begin{array}{rcl} 3^{n+1} & = & 3 \cdot 3^n \\ & > & 3 \cdot 2 \cdot n^3 \text{ (nach Voraussetzung)} \\ & = & 2 \cdot \left(n^3 + n^3 + n^3\right) \\ & > & 2 \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 6n\right) \text{ (da } n \geq 6 > 3 > 1) \\ & > & 2 \cdot \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) \\ & = & 2 \cdot \left(n+1\right)^3 . \end{array}$$

Damit ist ist also

$$3^{n+1} > 2 \cdot \left(n+1\right)^3 \tag{6}$$

und damit die Behauptung aus Gleichung (2) bewiesen. Das bedeutet aber, dass alle Elemente in M entweder 1 oder größer gleich 6 (und aus $\mathbb{N}$) sind. Damit gilt:

$$\begin{array}{rcl} M & = & \{n \in \mathbb{N} : \, n = 1 \, \vee \, n \geq 6\} \\ & = & \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \, n \geq 6\} \\ & = & \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4, 5\} \end{array}$$

Aufgabe 2.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| = |x-3|\}$

1. Fall $x \geq 3$

$$\begin{aligned} & |x-1| = |x-3| \\ \iff\ & x-1 = x-3 \\ \iff\ & -1 = -3 \lightning \end{aligned}$$

2. Fall $x > 1 \wedge x < 3$

$$\begin{aligned} & |x-1| = |x-3| \\ \iff\ & x-1 = 3-x \\ \iff\ & 2x = 4 \\ \iff\ & x = 2 \end{aligned}$$

3. Fall $x \leq 1$

$$\begin{aligned} & |x-1| = |x-3| \\ \iff\ & 1-x = 3-x \\ \iff\ & 1 = 3 \lightning \end{aligned}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 10 > 16\}$

$$\begin{aligned} & x^2 - x + 10 > 16 \\ \iff\ & x^2 - x - 6 > 0 \\ \iff\ & (x+2)(x-3) > 0 \\ \iff\ & ((x+2>0) \wedge (x-3>0)) \vee ((x+2<0) \wedge (x-3<0)) \\ \iff\ & ((x>-2) \wedge (x>3)) \vee ((x<-2) \wedge (x<3)) \\ \iff\ & (x>3) \vee (x<-2) \end{aligned}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} > 0\}$
Offenbar muss $x \neq 1$ gelten. Es bleiben zwei Fälle zu betrachten:

1.Fall $x > 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} > 0 \\ \iff\ & \frac{1}{1-x} > -\frac{1}{2} \\ \iff\ & 2 < -1\,(1-x) \\ \iff\ & 3 < x \end{aligned}$$

$\mathbb{L}1 = (1, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$

2.Fall $x < 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} > 0 \\ \iff \; & \frac{1}{1-x} > -\frac{1}{2} \\ \iff \; & 2 > -1\,(1-x) \\ \iff \; & 3 > x \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}2 = (-\infty, 1) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, 1)$$

Insgesamt ist somit:

$$\text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{L}1 \cup \mathbb{L}2 = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x-2| > 1\}$

1. Fall $x \geq 2$

$$\begin{aligned} & |x-1| + |x-2| > 1 \\ \iff \; & (x-1) + (x-2) > 1 \\ \iff \; & 2x > 4 \\ \iff \; & x > 2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}1 = (2, \infty)$$

2. Fall $x > 1 \wedge x < 2$

$$\begin{aligned} & |x-1| + |x-2| > 1 \\ \iff \; & (x-1) + (2-x) > 1 \\ \iff \; & 1 > 1 \lightning \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}2 = \{\}$$

3. Fall $x \leq 1$

$$\begin{aligned} & |x-1| + |x-2| > 1 \\ \iff \; & (1-x) + (2-x) > 1 \\ \iff \; & 2 > 2x \\ \iff \; & 1 > x \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}3 = (-\infty, 1)$$

Insgesamt gilt nun:

$$\text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{L}1 \cup \mathbb{L}2 \cup \mathbb{L}3 = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

e) $\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x-1}{x-2}\right| = 2\}$

$$\begin{aligned} & \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 2 \\ \iff & \left(\frac{x-1}{x+1} = 2\right) \vee \left(\frac{1-x}{1+x} = 2\right) \\ \iff & (x-1 = 2x+2) \vee (1-x = 2+2x) \\ \iff & (x = -3) \vee \left(x = -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Lösungsmenge } \mathbb{L} = \{-\frac{1}{3}, -3\}$$

Aufgabe 3.

Teil a) Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ ist kommutativ und assoziativ.

Die beiden Behauptungen sieht man folgendermaßen ein.

Kommutativität: Seien A und B zwei Mengen.

Es ist $x \in A \triangle B$
$\iff$ (Def. $\triangle$) $\quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$
$\iff$ (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$) $\quad (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin B \wedge x \in A)$
$\iff$ (Def. $\triangle$) $\quad x \in B \triangle A$

Assoziativität: Seien A, B und C Mengen.

Es ist $x \in (A \triangle B) \triangle C$
$\iff$ (Def $\triangle$) $\quad (x \in A \triangle B \wedge x \notin C)$ oder $(x \notin A \triangle B \wedge x \in C)$
$\iff$ (Def $\triangle$) $\quad ([x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \notin A \wedge x \in B]) \wedge x \notin C$ oder
$\neg([x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \notin A \wedge x \in B]) \wedge x \in C$
$\iff$ (Distributivität von $\wedge$ und $\vee$, De Morgan, $X \vee \neg X$ für Aussage X immer erfüllt)
$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$ oder
$([x \notin A \vee x \in B] \wedge [x \in A \vee x \notin B]) \wedge x \in C$
$\iff$ (Distributivität von $\wedge$ und $\vee$, $X \wedge \neg X$ nie erfüllt, $F \vee X \Leftrightarrow X$ für eine falsche Aussage F)
$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$ oder
$([x \notin A \wedge x \notin B] \vee [x \in B \wedge x \in A]) \wedge x \in C$
$\iff$ (Distributivität von $\wedge$ und $\vee$)
$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$ oder
$(x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in A \wedge x \in C)$
$\iff$ (Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$)
$(x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)$ oder
$(x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C)$
$\iff$ (Distributivität von $\wedge$ und $\vee$)
$x \in A \wedge ([x \notin B \wedge x \notin C] \vee [x \in B \wedge x \in C])$ oder
$x \notin A \wedge ([x \in B \wedge x \notin C] \vee [x \notin B \wedge x \in C])$
$\iff$ (Def. Δ, De Morgan)
$(x \in A \wedge \neg([x \in B \vee x \in C] \wedge [x \notin B \vee x \notin C])) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C)$
$\iff$ (Distributivität von $\wedge$ und $\vee$)
$(x \in A \wedge \neg([x \in B \wedge x \notin C] \vee [x \notin B \wedge x \in C])) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C)$
$\iff$ (Def. $\triangle$) $\quad (x \in A \wedge \neg(x \in B \triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C)$
$\iff$ (Def. $\triangle$) $\quad x \in A \triangle (B \triangle C)$

Zur Erinnerung: Die De Morganschen Regeln lauten

$$\neg(X \vee Y) \;\Leftrightarrow\; \neg X \wedge \neg Y,$$

sowie

$$\neg(X \wedge Y) \;\Leftrightarrow\; \neg X \vee \neg Y$$

für zwei Aussagen X und Y.

Teil b)

$$M := (A \triangle B) \cap (B \triangle C) \cap (C \triangle A) = \emptyset$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned}
& x \in (A \triangle B) \cap (B \triangle C) \cap (C \triangle A) \\
& \iff ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) && \text{(Definition } \triangle \text{)} \\
& \quad \wedge ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \notin B \wedge x \in C)) \\
& \quad \wedge ((x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \notin C \wedge x \in A)) \\
& \iff ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \wedge (x \in C \wedge x \notin A)) \\
& \quad \vee ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \wedge (x \notin C \wedge x \in A)) \\
& \quad \vee ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin B \wedge x \in C) \wedge (x \in C \wedge x \notin A)) \\
& \quad \vee ((x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \notin B \wedge x \in C) \wedge (x \notin C \wedge x \in A)) \\
& \quad \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \wedge (x \in C \wedge x \notin A)) \\
& \quad \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \wedge (x \notin C \wedge x \in A)) \\
& \quad \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \wedge (x \notin B \wedge x \in C) \wedge (x \in C \wedge x \notin A)) \\
& \quad \vee ((x \notin A \wedge x \in B) \wedge (x \notin B \wedge x \in C) \wedge (x \notin C \wedge x \in A))
\end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz entsteht durch mehrfaches Anwenden der Beziehung

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) = (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

Da keine der Alternativen jemals wahr wird, ist die Beziehung immer falsch. Es gibt also keine Elemente x, die in $(A \triangle B) \cap (B \triangle C) \cap (C \triangle A)$ liegen. Also gilt

$$(A \triangle B) \cap (B \triangle C) \cap (C \triangle A) = \emptyset.$$

Aufgabe 4.

Teil a)

Behauptung: $(A-B)\cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

Beweis: „$\Rightarrow$“

Sei $x \in B$.
$\Rightarrow x \in B \vee x \in (A-B) \Rightarrow x \in (A-B)\cup B$ ($= A$ nach Voraussetzung)
$\Rightarrow x \in A$

„$\Leftarrow$“
„$\subset$“ : Sei $x \in (A-B)\cup B$.
$\Rightarrow x \in (A-B) \subset A \quad \vee \quad x \in B \subset A$
$\Rightarrow x \in A$

„$\supset$“ : Sei $x \in A$
$\Rightarrow x \in (A-B) \quad \vee \quad x \in B$
$\Rightarrow x \in (A-B)\cup B$

Teil b)

Behauptung : $A\cup B = (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

Beweis:

„$\subset$“ : Sei $x \in (A\cup B)$.
$\Rightarrow x \in A \quad \vee \quad x \in B$
$\Rightarrow ((x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)\vee(x \in A \quad \wedge \quad x \in B))\vee$
$((x \in B \quad \wedge \quad x \notin A)\vee(x \in B \quad \wedge \quad x \in A))$
$\Rightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)\vee(x \in A \quad \wedge \quad x \in B)\vee(x \in B \quad \wedge \quad x \notin A)$
$\Rightarrow (x \in (A-B))\vee(x \in (A\cap B))\vee(x \in (B-A))$
$\Rightarrow x \in (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

„$\supset$“ : Sei $x \in (A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$.
$\Rightarrow (x \in (A-B))\vee(x \in (A\cap B))\vee(x \in (B-A))$
$\Rightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)\vee(x \in A \quad \wedge \quad x \in B)\vee(x \in B \quad \wedge \quad x \notin A)$
$\Rightarrow ((x \in A \quad \wedge \quad x \notin B)\vee(x \in A \quad \wedge \quad x \in B))\vee$
$((x \in B \quad \wedge \quad x \notin A)\vee(x \in B \quad \wedge \quad x \in A))$
$\Rightarrow x \in A \quad \vee \quad x \in B$
$\Rightarrow x \in (A\cup B)$