

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Analysis I WS 2009/2010  
Klausur

Prof. Dr. Hartmut Pecher

5. Februar 2010

**Aufgabe 1 (3 Punkte)** Geben Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen an (ohne Beweis !):

a)  $x_n = \frac{n^4 - 3n^3 + 1}{2n^4 + 1}$

b)  $x_n = (-1)^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) e^{-n}$

c)  $x_n = \sum_{k=0}^n 4^{-k}$ .

**Aufgabe 2 (3 Punkte)** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

**Aufgabe 3 (3 Punkte)** Für welche Zahlen  $x \in \mathbf{R}$  konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$$

**Aufgabe 4 (6 Punkte)** a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \cos^2 x \sin x$$

auf  $\mathbf{R}$  gleichmässig stetig ist (Hinweis: Mittelwertsatz).

b) Sei

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cos^2(nx) \sin(nx).$$

Zeigen Sie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  gleichmässig für  $x \in \mathbf{R}$ .

**Aufgabe 5 (5 Punkte)** Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion

$$f(x) = x e^{-x^2}.$$

Handelt es sich dabei um lokale oder globale Extrema ?

Wie verhält sich  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  ?

**Aufgabe 6 (4 Punkte)** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt  $x_0 = \frac{1}{2}$  in eine Taylorreihe. (Konvergenzbetrachtungen sind nicht erforderlich.)