WS 2008/09 # Klausur zur Analysis 1 **Prof. Fritzsche**

Matr.-Nr.: **Name:**

1) a) Sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie für $n \geq 3$, dass $(1+q)^n \geq 1 + nq + \dfrac{n(n-1)}{2} q^2$ ist, und dass die Folge $a_n := \dfrac{3n-1}{(1+q)^n}$ konvergiert. Bestimmen Sie außerdem ihren Grenzwert.

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 2^n \cdot \cos(3n)}{n!}$ konvergiert!

2) Sei $f(x) := \begin{cases} (1-x^2)/2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \sin(x - 1 + \pi) & \text{für } 1 \leq x \leq \pi + 1. \end{cases}$

Zeigen Sie, dass f auf $I := [0, \pi+1]$ differenzierbar ist. Wie oft ist f differenzierbar? Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte von f auf I.

3) a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan t \, dt$.

b) Konvergiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \sin x \, dx$?

4) Formulieren **und** beweisen Sie **einen** der folgenden drei Sätze:

a) Satz über Konvergenz und Grenzwert der geometrischen Reihe.

b) Satz von der monotonen Konvergenz.

c) Das notwendige Kriterium für lokale Extremwerte.

5) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Antworten Sie mit JA oder NEIN und schreiben Sie dazu eine Begründung oder Erklärung.

a) Die Funktion $\sinh(x) := (e^x - e^{-x})/2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

b) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 5-mal differenzierbar, $a < x_0 < b$, $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0$ und $f^{(5)}(x_0) > 0$. Dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

c) Die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert auf $[-1, 1]$ punktweise.

d) Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf $[0, 1]$ gleichmäßig.

e) Sei f auf $(-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar und $Tf(0; x)$ die Taylorreihe von f im Nullpunkt. Dann konvergiert $Tf(0; x)$ auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(-1, 1)$ gleichmäßig gegen f.

f) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so besitzt f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion.

Afg:	1a	1b	2	3a	3b	4	5	Σ
Punkte:	7	5	12	6	6	9	15	60
erreicht:								

Aufgabenblatt bitte mit den Lösungen abgeben!